콘크리트 구조의 재료 물성 재구성을 위한 전기 임피던스 단층촬영 기법

정 봉 구¹ · 김 보 영¹ · 강 준 원^{1*} · 황 진 하²

¹홍익대학교 토목공학과, ²홍익대학교 신소재공학과

Electrical Impedance Tomography for Material Profile Reconstruction of Concrete Structures

Bong-Gu Jung¹, Boyoung Kim¹, Jun Won Kang^{1*} and Jin-Ha Hwang²

¹Department of Civil Engineering, Hongik University, Seoul, 04066, Korea

²Department of Materials Science and Engineering, Hongik University, Seoul, 04066, Korea

Abstract

This paper presents an optimization framework of electrical impedance tomography for characterizing electrical conductivity profiles of concrete structures in two dimensions. The framework utilizes a partial-differential-equation(PDE)-constrained optimization approach that can obtain the spatial distribution of electrical conductivity using measured electrical potentials from several electrodes located on the boundary of the concrete domain. The forward problem is formulated based on a complete electrode model(CEM) for the electrical potential of a medium due to current input. The CEM consists of a Laplace equation for electrical potential and boundary conditions to represent the current inputs to the electrodes on the surface. To validate the forward solution, electrical potential calculated by the finite element method is compared with that obtained using TCAD software. The PDE-constrained optimization approach seeks the optimal values of electrical conductivity on the domain of investigation while minimizing the Lagrangian function. The Lagrangian consists of least-squares objective functional and regularization terms augmented by the weak imposition of the governing equation and boundary conditions via Lagrange multipliers. Enforcing the stationarity of the Lagrangian leads to the Karush-Kuhn-Tucker condition to obtain an optimal solution for electrical conductivity within the target medium. Numerical inversion results are reported showing the reconstruction of the electrical conductivity profile of a concrete specimen in two dimensions.

Keywords : *electrical impedance tomography, complete electrode model, finite element method, electrical conductivity, inversion*

1. 서 론

전기 임피던스 단층촬영 기법(electrical impedance tomography, EIT)은 전기 전도도 또는 임피던스의 공간 분포를 추론하여 구조물의 단층이미지를 재구성하는 비침투 기법으로서(Hallaji *et al.*, 2014; Hadinia *et al.*, 2016), 일반적으로 표면에 부착된 전극을 통해 구조물에 전류를 가하는 방법으로 수행된다. EIT는 암 검출, 뇌 활동 이미징 등과 같은 의학 분야에서 사용되며 지질학, 산업 공정 등 여러 분야에서 모니터링

방법으로 사용되고 있다.

이 논문에서는 2차원 콘크리트 구조체의 전기 전도도 추정을 위한 EIT의 최적화 프레임워크를 제시한다. 이는 비선형 역해석 프레임워크로서, 전류 흐름에 따른 전위의 정해석 문제(forward problem)와 역해석 문제(inverse problem)로 구분된다. EIT의 정해석은 구조체 표면에 부착된 전극을 통해 전류를 가할 때 구조체 내부 및 전극의 전위를 계산하는 문제로 정의할 수 있다. 이 연구에서는 EIT의 정해석 문제를 풀기 위한 수학적 모델로서 완전전극모델(complete electrode model,

* Corresponding author:

Tel: +82-2-320-1601; E-mail: jwkang@hongik.ac.kr

Received July 2 2019; Revised July 18 2019;

Accepted July 19 2019

©2019 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

CEM)을 사용하였다. CEM은 전극을 통해 전류를 입력할 때 전류가 저항이 낮은 곳으로 흐르면서 일어나는 전류 손실과 접촉면과 전극 사이에 존재하는 저항으로 인해 발생하는 전압강하를 모두 고려한 수학적 모델이다(Cheng *et al.*, 1989; Vauhkonen *et al.*, 1999). 위의 전류 손실과 전압강하는 측정 전압에 영향을 미쳐 내부 전도도를 추정하는데 있어 오차를 증가시켜 단층촬영 시 공간 해상도를 떨어뜨린다.

이 역해석 문제는 정해석에서 계산한 전극의 전위와 측정된 전극의 전위차를 최소화하는 문제로 정의할 수 있다. 역해석을 위한 프레임워크로서 편미분방정식을 구속조건으로 하는 최적화 방법을 이용하였다. 이 최적화 문제를 라그랑주 승수법을 이용하여 비구속 최적화 문제로 전환하고, 라그랑지안의 1차 최적화 조건을 이용하여 목적함수를 최소로 하는 내부의 전기 전도도 분포를 재구성하였다.

이 논문에서는 수치예제를 통해 CEM과 Technology Computer Aided Design(TCAD) 소프트웨어를 이용한 정해석 결과를 비교하여 전위 분포 정해석의 정확도를 검토하였다. 그리고 2차원 콘크리트 구조물 내부의 sampling points에서 계산된 전기 전도도와 가정한 전기 전도도 값을 비교하여 2차원 콘크리트 구조물에 대한 EIT 최적화 프레임워크의 적용성을 검토하였다.

2. 완전전극 모델을 이용한 전기 포텐셜의 정해석

이 논문에서는 2차원 원형 콘크리트 구조물의 내부 전위를 계산하기 위한 전극 모델로서 CEM을 도입하였으며, 구조물 표면에 부착된 전극을 통해 전류를 입력함에 따른 내부 전위를 계산하였다. Fig. 1은 원형 구조 영역과 이를 둘러싸는 전극을 나타낸다. CEM을 이용한 전기 포텐셜의 정해석은 다음과 같은 경계값 문제로 표현될 수 있다(Cheng *et al.*, 1989; Vauhkonen *et al.*, 1999).

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u + z\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l \quad \text{on } \Gamma_E, l = 1, 2, \dots, L \quad (2a)$$

$$\int_{\Gamma_E} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = I_l \quad (2b)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{off } \cup_{l=1}^L \Gamma_E \quad (2c)$$

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0 \quad (3a)$$

$$\sum_{l=1}^L U_l = 0 \quad (3b)$$

식 (1)은 전기 전도도(σ)와 내부의 전위(u)가 혼합된 연립 미분방정식으로서 2차원 영역에서의 전기 포텐셜의 지배방정식을 나타낸다. 식 (2a)~(2c)는 경계조건이며, 여기서 z_l , U_l 은 l 번째 전극 E_l 의 접촉저항과 전위이다. I_l 은 l 번째 전극에 주입된 전류이고 n 은 법선벡터 방향이다. 식 (3a)와 (3b)는 CEM의 경계조건을 나타내며 각각 해의 존재성과 유일성에 해당되는 조건이다.

Fig. 1 Circular domain with electrodes on the boundary

이러한 경계값 문제에서 내부의 전위(u)와 전극의 전위(U_l)은 혼합유한요소법을 이용하여 계산할 수 있다. 전기 포텐셜의 지배방정식 (1)에 가중치 함수 $v(x,y)$ 와 $V_l(x,y)$ 를 곱하고 전체 영역에 대해 적분한 후 식 (2a)~(2c)의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{\Gamma_E} (u - U_l)(v - V_l) d\Gamma = \sum_{l=1}^L I_l V_l \quad (4)$$

식 (4)에서 내부 전위 u 의 근사함수인 u^h 는 기저함수 $\phi_i(x,y)$ 를 사용하여 식 (5a)와 같이 표현할 수 있고, 전극의 전위 U_l 의 근사함수인 U_l^h 는 전극의 특성벡터 $\mathbf{n}_j$ 를 사용하여 식 (5b)와 같이 표현할 수 있다. 또한 가중치 함수 $v(x,y)$ 와 $V_l(x,y)$ 역시 기저함수 $\phi_i(x,y)$ 와 특성벡터 $\mathbf{n}_j$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(x,y) \simeq u^h(x,y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x,y) \quad (5a)$$

$$U_l \simeq U_l^h = \sum_{j=1}^{L-1} \beta_j (n_j)_l \quad (5b)$$

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^N v_i \phi_i(x,y) \quad (6a)$$

$$V_l(x,y) = \sum_{j=1}^{L-1} V_j (n_j)_l \quad (6b)$$

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_{L-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

식 (5b)에서 $(n_j)_l$ 은 $\mathbf{n}_j$ 벡터의 l 번째 행 성분이다. 식 (5)와 (6)을 식 (4)에 대입하면 $\mathbf{Ku}=\mathbf{F}$ 형태의 선형방정식을 얻을 수 있고, 이 선형방정식을 계산하여 각 노드의 전위와 전극의 전위를 계산할 수 있다. 선형방정식의 강성행렬, 힘 벡터, 해 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{Ku}=\mathbf{F} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega + \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{\Gamma_{E_l}} \phi_i \phi_j d\Gamma \quad (9a)$$

$$C_{ij} = -\frac{1}{z_1} \int_{\Gamma_{E_1}} \phi_i d\Gamma + \frac{1}{z_{j+1}} \int_{\Gamma_{E_{j+1}}} \phi_i d\Gamma \quad (9b)$$

$$C_{ij}^T = -\frac{1}{z_1} \int_{\Gamma_{E_1}} \phi_j d\Gamma + \frac{1}{z_{i+1}} \int_{\Gamma_{E_{i+1}}} \phi_j d\Gamma \quad (9c)$$

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{|e_l|}{z_1} & i \neq j \\ \frac{|e_l|}{z_1} + \frac{|e_l|}{z_{j+1}} & i = j \end{cases} \quad (9d)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_1 - I_3 \\ I_1 - I_4 \\ \vdots \\ I_1 - I_L \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$\mathbf{U}_l = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{L-1} \beta_l \\ -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ \vdots \\ -\beta_{L-1} \end{bmatrix} \quad (11b)$$

여기서, $|e_l|$ 은 2차원 영역에서 l 번째 전극의 길이를 나타내며, 위 선형방정식으로부터 α 및 β 를 구해 정해석 문제의 해인 내부 전위 u 와 전극의 전위 U_l 를 계산할 수 있다.

3. 구조물의 전기 전도도 분포 재구성을 위한 EIT

3.1 역해석 문제의 정의

구조물의 2차원 영역에서 표면에 부착된 전극의 측정 전위를 역해석하여 구조물 내부의 전기 전도도 분포를 도출하는 문제는 다음과 같은 최적화 문제로 표현된다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } J := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (U_l - U_l^m)^2 + \gamma(\sigma) \\ &\text{subject to } (1) \sim (3). \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, U_l 은 정해석에서 계산한 전극의 전위이고 U_l^m 은 표면에 부착된 전극에서 측정된 전위이다. 식 (12)의 최적화 문제는 지배방정식 (1)과 경계조건을 구속조건으로 한다. 이러한 역해석에는 일반적으로 해의 유일성이 보장되지 않는 ill-posedness의 문제점이 발생한다. 이를 해결하기 위하여 목적함수 J 에 $\sigma(x, y)$ 에 대한 정규화 항인 $\gamma(\sigma)$ 를 포함시켰다. $\gamma(\sigma)$ 는 정규화계수 R_σ 를 사용하여 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\gamma(\sigma) = \frac{1}{2} R_\sigma \int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot \nabla \sigma d\Omega \quad (13)$$

이 논문에서는 위의 최적화 문제를 비구속 최적화 문제로 전환하기 위해 라그랑주 승수법을 도입하였다. 식 (12)의 목적함수를 식 (1)의 지배방정식, 식 (2)의 경계조건과 라그랑주 승수(w, W_l)에 의해 확장하여 다음과 같은 라그랑지안(L)을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} L(u, U_l, w, W_l, \sigma) = & \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (U_l - U_l^m)^2 + \gamma(\sigma) \\ & + \int_{\Omega} w \nabla \cdot (\sigma \nabla u) d\Omega \\ & + \sum_{l=1}^L \int_{\Gamma_{E_l}} W_l \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial n} - I_l \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

이 라그랑지안을 최소로 하는 전기 전도도 σ 가 앞서 정의된 역해석 문제의 해이다. 최적해에서 상태변수 u , U_l , 라그랑주 승수(수반변수) w , W_l 과 제어변수 σ 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되는 1차 최적화 조건을 이용하여 전기 전도도 σ 의 분포를 결정한다.

3.2 1차 최적화 조건

식 (12)의 1차 최적화 조건 중 최적해 w 와 W_l 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되어야 하는 조건($\delta_w L = 0$,

$\delta_{W_l} L=0$)으로부터 상태방정식(state equations)과 그에 따른 경계조건을 얻을 수 있다. 이렇게 유도한 상태문제(state problem)는 식 (1)~(2)의 정해석 문제와 동일하다.

둘째로, 최적해 u , U_l 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되어야 하는 조건($\delta_u L=0$, $\delta_{U_l} L=0$)으로부터 다음과 같은 수반방정식(adjoint equations)과 그에 따른 경계 조건을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla w) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (15)$$

$$w + z_l \sigma \frac{\partial w}{\partial n} = -W_l \quad \text{on } \Gamma_E, l=1, 2, \dots, L \quad (16a)$$

$$\sigma \frac{\partial w}{\partial n} = U_l - U_l^m \quad \text{on } \Gamma_E, l=1, 2, \dots, L \quad (16b)$$

$$\sigma \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{off } \bigcup_{l=1}^L E_l \quad (16c)$$

식 (15)는 CEM을 전극 모델로 하는 2차원 영역에서 수반 변수 w , W_l 에 대한 혼합 연립미분방정식으로서 (1)의 상태방정식과 유사한 연산자를 갖는다. 식 (16a)~(16c)는 경계조건을 나타낸다. w 와 W_l 또한 혼합유한요소법을 이용하여 구할 수 있다. 식 (15)에 가중치 함수 $v(x, y)$ 와 $V_l(x, y)$ 를 곱하고 전체 영역에 대해 적분한 후 식 (16)의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \nabla w \cdot \nabla v d\Omega + \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{\Gamma_E} (w - W_l)(v - V_l) d\Gamma \\ = \sum_{l=1}^L (U_l - U_l^m) V_l e_l \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)의 해인 w 와 W_l 은 식 (5)와 같이 기저함수 $\phi_i(x, y)$ 와 특성벡터 $\mathbf{n}_j$ 를 이용하여 다음과 같이 근사된다.

$$w(x, y) \simeq w^h(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x, y) \quad (18a)$$

$$W_l(x, y) \simeq W_l^h(x, y) = \sum_{j=1}^{L-1} \beta_j (n_j)_l \quad (18b)$$

식 (18)를 식 (17)에 대입하여 선형방정식을 얻을 수 있고, 이 선형방정식을 계산하여 각 노드에서의 w 와 전극의 W_l 를 구할 수 있다.

셋째로, 최적 제어변수 σ 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되어야 하는 조건($\delta_{\sigma} L=0$)으로부터 다음과 같은 제어 방정식(control equation)과 그에 따른 경계조건을 얻을 수 있다.

$$-R_{\sigma} \Delta \sigma - \nabla w \cdot \nabla u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (19)$$

$$R_{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} + w \frac{\partial u}{\partial n} + W_l \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_E, l=1, 2, \dots, L \quad (20a)$$

$$R_{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial n} + w \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{off } \bigcup_{l=1}^L E_l \quad (20b)$$

라그랑지안의 1차 최적화 조건으로부터 유도된 상태문제, 수반문제, 제어문제들은 이 최적화 문제의 KKT(karush-kuhn-tucker) 조건이며, 이로부터 구한 $\sigma(x, y)$ 가 주어진 역해석 문제의 해가 된다.

3.2 최적화 알고리즘

상태문제, 수반문제, 제어문제로 구성된 비선형 미분방정식 시스템을 연립하여 풀면 u , U_l , w , W_l , σ 의 최적해를 구할 수 있다. 그러나 과정이 복잡하고 고차원 문제의 경우 계산에 소요되는 메모리가 크다. 따라서 최적화 변수를 $\sigma(x, y)$ 로 국한하고 비선형 미분방정식 시스템을 반복적으로 계산하여 $\sigma(x, y)$ 를 업데이트함으로써 최적의 전기 전도도 분포를 도출할 수 있다.

최적해를 도출하기 위해 구조물 내부의 전기 전도도 분포를 가정하고 표면에 부착된 전극을 통해 입력된 전류에 대한 상태문제((1)~(3))의 응답 $u(x, y)$ 와 U_l 를 계산한다. 이 상태문제의 응답을 이용하여 수반문제((15)~(16))의 응답인 $w(x, y)$ 와 W_l 을 구한다. 위에서 구한 상태변수와 수반변수의 값들을 이용하여 제어변수 σ 에 대한 라그랑지안의 그래디언트(gradient)를 다음과 같이 계산한다.

$$g_{\sigma} \equiv \nabla_{\sigma} L \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &= -R_{\sigma} \Delta \sigma - \nabla w \cdot \nabla u \\ &= R_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right) + \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

식 (21)의 미분계수들은 유한차분법을 이용하여 계산할 수 있다. 이 논문에서는 원형 콘크리트 구조체 영역을 모델링하기 위해 방사형의 유한요소 격자모델을 사용하였는데, 이에 따라 식 (21)의 그래디언트를 다음과 같이 극좌표계의 식으로 표현하여 계산하였다.

$$\begin{aligned} g_{\sigma} = R_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \right) \\ + \left(-\frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

이 그래디언트를 이용하여 제어변수 $\sigma(x,y)$ 의 최적해로의 탐색방향(search direction)을 결정할 수 있다. Steepest descent법과 Conjugate Gradient법을 이용한 이산(discrete) 탐색방향 벡터($\mathbf{d}_k$)는 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} -\mathbf{g}_k & (k=0) \\ -\mathbf{g}_k + \frac{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1} \cdot \mathbf{g}_{k-1}} \mathbf{d}_{k-1} & (k \geq 1) \end{cases} \quad (23)$$

여기서, $\mathbf{g}_k$ 는 역해석의 k 번째 반복계산에서의 이산 그래디언트로 다음과 같이 각 노드에서의 식 (22) 값들로 이루어진 벡터이다.

$$\mathbf{g}_k = (\nabla_{\sigma} L)_k \quad (24)$$

식 (23)로 부터 이산 탐색방향 벡터를 계산한 후 전기 전도도 벡터 σ_k 를 업데이트할 수 있다.

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + \alpha \mathbf{d}_k \quad (25)$$

여기서, σ_k 는 역해석의 k 번째 반복계산에서의 이산 전기 전도도로서 각 노드에서의 전기 전도도 값들로 구성된 벡터이다. α 는 $\mathbf{d}_k$ 방향으로의 스텝길이로서 전기 전도도의 업데이트 시 식 (12)의 목적함수가 충분히 감소되도록 결정해야 한다.

4. 수치예제

4.1 CEM과 TCAD를 이용한 정해석 결과 비교

이 논문에서 제시한 2차원 영역에서의 전기 포텐셜의 정해석 알고리즘의 정확도를 평가하기 위해 Fig. 2와 같이 균질한 전기 전도도를 갖는 원형 구조물의 전위 분포를 도출하였다.

해석 영역의 전기 전도도는 $1.56 \times 10^{-1} \text{ S/cm}$ 이고 반지름은 10cm이다. 총 16개의 전극이 전체 경계의 50%를 차지하도록

Fig. 2 Circular domain with 16 boundary electrodes

록 배치하고 5번 전극에 0.78A의 전류를 입력하여 13번 전극으로 나오도록 전류 입력을 설정하였다. 접촉 저항은 $9.8 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{cm}^2$ 를 사용하였다. 이 경우 전류가 입력되는 5번 전극에 10V의 전압이 발생한다. Fig. 3은 입력 전류에 대한 2차원 영역 내부의 전위 분포를 보여준다. CEM과 TCAD를 이용하여 얻은 전위 분포 결과 분포 형상이 매우 유사하게 나타남을 확인할 수 있다.

Fig. 3 Distribution of calculated electrical potential

이 연구에서 계산한 전위 값의 정확도를 평가하기 위하여 반도체 공정 기술이나 소자 개발 등 전자 분야에서 널리 사용되는 컴퓨터 시뮬레이션 소프트웨어인 TCAD를 이용해 얻은 결과를 비교하였다. Fig. 4는 각 전극의 전위를 비교한 그래프를 나타낸다. 이 논문에서는 CEM과 TCAD를 이용하여 구한 전극의 전위차를 다음과 같은 식을 이용하여 계산하였다.

Fig. 4 Potential at each electrode

Table 1 Errors between CEM and TCAD results

Position	CEM(V)	TCAD(V)	Error(%)
1	10.00	10.00	0.00
2	6.93	7.03	1.42
3	6.05	6.07	0.33
4	5.48	5.48	0.00
5	5.00	5.00	0.00
6	4.52	4.52	0.00
7	3.95	3.93	0.51
8	3.07	2.97	3.37
9	0.00	0.00	0.00
10	3.07	2.97	3.37
11	3.95	3.93	0.51
12	4.52	4.52	0.00
13	5.00	5.00	0.00
14	5.48	5.48	0.00
15	6.05	6.07	0.33
16	6.93	7.03	1.42

$$\text{Error}(\%) = \frac{|V_{\text{CEM}} - V_{\text{TCAD}}|}{V_{\text{TCAD}}} \times 100 \quad (26)$$

Table 1은 각 전극 위치에서 계산된 전위 값의 차이를 나타낸다. 전극의 전위 오차는 최대 3%로서 차이가 비교적 낮다. 이는 CEM을 이용한 전기 포텐셜 정해석 결과의 정확도가 높음을 나타낸다.

4.2 비균일 매질의 전기 포텐셜 해석 결과

Fig. 5는 전기 포텐셜의 정해석을 위한 2차원 콘크리트 균일 매질 및 비균일 매질의 개략도이다. 반지름이 15cm인 콘크리트로 구성된 균일영역과 반지름이 5cm인 강재가 삽입된 비균일영역에 대하여 CEM을 이용한 정해석을 수행하였다.

Fig. 5 Concrete domains for EIT

균일영역의 전기 전도도는 $1 \times 10^{-6} \text{ S/cm}$ 로서, 이는 콘크리트의 평균적인 전기 전도도이다. 비균일영역에 존재하는 강재의 전기 전도도는 $1 \times 10^7 \text{ S/cm}$ 이다. 총 16개의 전극이 경계면의

50%를 차지하도록 배치하고 1번 전극에 1A를 입력하여 9번 전극으로 나오도록 전류 입력을 설정하였다. 접촉 저항은 $0.22 \Omega \cdot \text{cm}^2$ 를 사용하였다. Fig. 6은 균일영역과 비균일영역에서의 정해석 결과를 나타낸다.

(a) Homogeneous domain

(b) Heterogeneous domain

(c) Change of potential in the x -direction($y=0$)

(d) Potential of each electrode

Fig. 6 Distribution of electrical potential

균일영역과 비균일영역의 전위 분포도를 비교하였을 때, 강재가 배치된 영역의 전위가 작으므로 강재의 배치 위치를 명확히 확인할 수 있다. Fig. 6(c)에 제시된 x 축 방향($y=0$)으로의 전위 변화 그래프에서 강재가 배치된 영역의 전위가 작은 것을 확인할 수 있다.

4.3 EIT의 역해석 결과

EIT를 이용해 2차원 콘크리트 영역의 전기 전도도 분포를 추정하기 위해 Fig. 7과 같이 반지름이 15cm인 균일영역에 대해 역해석을 수행하였다. 2차원 콘크리트 영역의 전기 전도도는 $1 \times 10^{-6} \text{S/cm}$ 이며 해석 영역의 요소 개수는 6,400개, 요소 길이는 0.3cm이다. 전기 전도도 분포를 재구성한 결과를 Fig. 8에 제시하였다.

Fig. 7 Location of sampling points

Fig. 8(a)는 원형 콘크리트 구조의 목표(target) 전기 전도도 분포이고 Fig. 8(b)는 역해석을 위한 전기 전도도의 초기 가정값 분포로서 그 크기는 $\sigma = 0.9 \times 10^{-6} \text{S/cm}$ 이다. Fig. 8(c)는 EIT 역해석으로부터 도출한 전기 전도도 분포이다. 방사형의 유한요소를 사용하였으므로 원점 부근과 경계면 부근에서 전기 전도도를 정확히 재구성하기가 쉽지 않지만, 그 외 부분에서는 목표 전기 전도도와 비교적 유사하게 재구성할 수 있었다. 식 (13)에 제시된 정규화계수 R_o 의 초기값은 $R_o = 1.0$ 로 설정하였고, Kang과 Kallivokas(2010)가 제안한 정규화계수 연속기법(regularization factor continuation scheme)을 사용하여 역해석의 반복계산마다 그 값을 조절 하였다. Fig. 8(d)는 식 (12)에 제시된 misfit 함수인 $F = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (U_l - U_l^m)^2$ 의 역해석 반복계산 수에 대한 변화를 나타낸다. 총 5614번의 반복계산이 소요되었고 계산된 전극의 전위와 측정된 전극의 전위의 차가 3.22×10^{-9} 까지 감소하였다.

Table 2는 각각 A(0,0), B(4,0), C(8,0), D(12,0) 위치에서 역해석 결과로부터 얻은 전기 전도도와 실제 전기 전도도의 오차를 제시한다. 최대 오차는 8%로서 원점과 경계면을 제외한 영역에서는 대체로 해의 정확성이 높다고 할 수 있다.

Fig. 8 Target, initial guess, and reconstructed profiles of electrical conductivity

Table 2 Errors at sampling points

Point	Reconstructed σ (V)	Target σ (V)	Error(%)
A	1.06×10^{-6}	1.00×10^{-6}	6.00
B	1.08×10^{-6}	1.00×10^{-6}	8.00
C	1.02×10^{-6}	1.00×10^{-6}	2.00
D	0.99×10^{-6}	1.00×10^{-6}	1.00

4. 결 론

이 논문에서는 2차원 콘크리트 구조물을 대상으로 CEM을 이용한 전기 포텐셜의 정해석 방법을 소개하고 표면에 부착된 전극을 통해 입력된 전류에 대한 구조물 내부의 전위분포를 도출하였다. 전극의 위치에서 계산된 전위응답과 측정된 전위를 이용하여 구조물 내부의 전기 전도도 분포를 추정하는 비선형 역해석 기법을 제시하였다.

CEM과 TCAD를 사용하여 얻은 정해석 결과를 비교하여 이 논문에서 사용하는 정해석 알고리즘의 정확성을 평가하였다.

균일한 물성을 갖은 2차원 콘크리트 영역과 강재가 배치된 비균일영역의 전위 분포를 계산하여 강재영역의 위치를 추정할 수 있었으며, 라그랑지안의 최적화 조건에 기반한 역해석 프레임워크를 통해 미지의 전기 전도도 분포를 추정할 수 있었다. 그리고 정규화기법을 이용해 역해석에 존재하는 해의 다중성 문제를 완화시켰다.

이 논문의 연구는 2차원 또는 3차원에서의 EIT 역해석을 위한 기반연구로서, EIT를 이용해 콘크리트 구조물 내부의 기하학적 형태나 결함의 분포를 추정하는데 유용한 정보를 제공할 것으로 기대된다.

감사의 글

이 연구는 2017년도 미래창조과학부와 2016년도 교육부의 지원으로 한국연구재단의 지원(NRF-2017R1C1B2004975, NRF-2016R1D1A1B01015557)에 의하여 수행되었습니다. 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

References

- Cheng, K.S., Isaacson, D., Newell, J.C., Gisser, D.G. (1989) Electrode Models for Electric Current Computed Tomography, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 36(9), pp.918~924.
- Cheney, M., Isaacson, D., Newell, J.C., Simske, S., Goble, J. (1990) NOSER: An Algorithm for Solving the Inverse Conductivity Problem, *Int. J. Imaging Syst. & Technol.*, 2(2), pp.66~75.
- Cheney, M., Isaacson, D., Newell, J.C. (1999) Electrical Impedance Tomography, *SIAM Rev.*, 41(1), pp.85~101.
- Vauhkonen, P.J., Vauhkonen, M., Savolainen, T., Kaipio, J.P. (1999) Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography based on the Complete Electrode Model, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 46(9), pp.1150~1160.
- Kang, J.W., Kallivokas, L.F. (2010) Mixed Unsplit-field Perfectly-matched-layers for Transient Simulations of Scalar Waves in Heterogeneous Domains, *Comput. Geosci.*, 14(4), pp.623~648.
- Kang, J.W., Kallivokas, L.F. (2011) The Inverse Medium Problem in Heterogeneous PML-Truncated Domains using Scalar Probing Waves, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 200(1-4), pp.265~283.
- Kang, J.W. (2013) Time-Domain Elastic Full-Waveform Inversion Using One-dimensional Mesh Continuation Scheme, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 26(4), pp.213~221.
- Hadinia, M., Jafari, R., Soleimani, M. (2016) EIT Image Reconstruction based on a Hybrid FE-EFG Forward Method and the Complete-Electrode Model, *Physiol. Meas.*, 37(6), p.863.
- Hallaji, M., Seppänen, A., Pour-Ghaz, M. (2014) Electrical Impedance Tomography-based Sensing Skin for Quantitative Imaging of Damage in Concrete, *Smart Mater. & Struct.*, 23(8), 085001.

요 지

이 논문은 재료의 전기 전도도 분포를 재구성하는 전기임피던스 단층이미지 기법(electrical impedance tomography; EIT)을 제시한다. 이 문제는 구조물 표면의 전극에서 측정된 전위와 계산된 전위의 차를 최소화하여 전기 전도도의 공간적 분포를 재구성하는 최적화 문제로 정의된다. 전류 입력 시 전위를 구하는 경해석 문제의 수학적 모델로서 완전전극모델(complete electrode model; CEM)을 사용하였다. 완전전극모델은 전기 포텐셜에 대한 라플라스 방정식과 전류 입력에 따른 경계조건들로 구성되는 경계값 문제이다. 완전전극모델 해의 정확성을 검증하기 위하여 유한요소법을 이용해 구한 원형 구조물의 전위 해와 Technology Computer Aided Design(TCAD) 소프트웨어를 사용해 얻은 결과를 비교하였다. 완전전극모델의 지배방정식과 경계조건을 구속조건으로 하는 최적화 문제를 라그랑주 승수법(lagrange multiplier method)을 이용해 비구속 최적화 문제로 전환하고 라그랑지안의 1차 최적화 조건으로부터 전극에서의 전위 차를 최소화하는 최적의 전기전도도 분포를 도출하였다. 원형 균일영역의 전기 전도도 분포를 재구성하는 역해석 예제를 통해 완전전극모델 기반 EIT 프레임워크의 적용성을 검토하였다.

핵심용어 : 전기임피던스 단층촬영 기법(EIT), 완전전극모델(CEM), 유한요소법, 전기 전도도, 역해석