층상 waveguide에서의 SH파 전파 해석을 위한 경계조건

이 진 호^{1†}

¹부경대학교 해양공학과 부교수

Consistent Boundary Condition for Horizontally-Polarized Shear (SH) Waves Propagated in Layered Waveguides

Jin Ho Lee^{1†}

¹Associate Professor, Department of Ocean Engineering, Pukyong National University, Busan, 48513, Korea

Abstract

The wave-propagation phenomenon in an infinite medium has been used to describe the physics in many fields of engineering and natural science. Analytical or numerical methods have been developed to obtain solutions to problems related to the wave-propagation phenomenon. Energy radiation into infinite regions must be accurately considered for accurate solutions to these problems; hence, various numerical and mechanical models as well as boundary conditions have been developed. This paper proposes a new boundary condition that can be applied to scalar-wave or horizontally-polarized shear-wave (or SH-wave) propagation problems in layered waveguides. A governing equation is obtained for the SH waves by applying finite-element discretization in the vertical direction of the waveguide and subsequently modified to derive the boundary condition for the infinite region of the waveguide. Using the orthogonality of the eigenmodes for the SH waves in a layered waveguide, the new boundary condition is shown to be equivalent to the existing root-finding absorbing boundary condition; further, the accuracy is shown to increase with the degree of the new boundary condition, and its stability can be proven. The accuracy and stability are then demonstrated by applying the proposed boundary condition to wave-propagation problems in layered waveguides.

Keywords : infinite media, waveguide, scalar wave, horizontally-polarized shear (SH) wave, wave propagation, boundary condition, root-finding absorbing boundary condition

1. 서론

파전파 이론은 공학과 자연과학의 여러 분야에서 다양한 물리적 현상을 서술하는데 활용되고 있다. 반무한 층상 지반에 놓인 구조물의 동적 거동 (지반-구조물 상호작용), 부유식 또는 고정식 해상풍력발전 시스템, 해중터널 등의 다양한 해양 구조물의 동적 거동 (유체-구조물 상호작용), 탄성파를 이용한 지반 탐사, 지진원으로부터의 지진파 전파, 다양한 기상 조건 하에서의 대기 또는 해양에서의 유체 압력 및 속도 분포 계산 등과 같이 파전파 이론은 토목공학, 기계공학, 조선공학, 지진학, 기상학, 해양학 등 다양한 분야의 다양한 물리적 현상들의 토대를 이루고 있다. 그런데 언급한 다양한 파전파 현상은 대

상 영역이 한정된 유한 매질이 아니라 반무한 층상 지반, 해양, 대기 등과 같은 무한 매질에서 발생하고 있다. 즉, 파전파 현상과 관련된 공학과 자연과학의 다양한 문제를 다루기 위해서는 무한 매질에서의 파전파 현상을 정확히 모사할 수 있어야 하는 것이다.

무한 매질에서의 파전파 현상은 유한요소법, 유한차분법 등과 같은 수치 기법을 사용하여 모사할 수 있다. 하지만, 이러한 기법들은 유한한 영역을 대상으로 하므로, 이 기법들을 사용하여 무한 매질에서의 파전파 현상을 모사할 때는 무한 영역으로의 에너지 방사를 정확하게 고려할 수 있는 특수한 수치적 또는 역학적 모형 또는 경계조건(boundary condition, BC)을 사용하여야 한다 (Fig. 1). 만약 무한 영역의 영향을 정확히 고

[†]Corresponding author:

Tel: +82-51-629-6591; E-mail: jhlee0218@pknu.ac.kr

Received January 7 2021; Revised January 19 2021;

Accepted January 20 2021

© 2021 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Fig. 1 Propagation of SH waves in an infinite medium

려할 수 없으면 에너지가 유한한 영역에 갇히게 되어 실제와는 아주 다른 해석 결과가 얻어지게 되는 것이다. 그러므로 무한 영역의 영향을 정확히 고려하기 위하여 전달경계(Kausel, 1974), 경계요소(Beskos, 1987; 1997), 무한요소(Lim *et al.*, 2016), 고차의 흡수경계조건(high-order absorbing boundary condition) (Givoli, 2004), perfectly matched layer(PML)(Basu and Chopra, 2004) 등과 같은 다양한 모형이 개발되어 다양한 문제에 활용되어 왔다. 최근에는 무한 매질의 분산 방정식(dispersion equation)의 해를 구하는 기법에 근거한 root-finding absorbing boundary condition(RFABC)이 scalar wave, 탄성파, poroelastic wave에 대하여 개발되어 다양한 파전파 문제에 적용되었다(Lee and Tassoulas, 2018; 2019; Lee, 2020; 2021). 특히, RFABC는 탄성파와 poroelastic wave에 대해서도 안정적인 해를 얻을 수 있음이 증명되었다(Lee and Tassoulas, 2019; Lee, 2020).

한편, 무한 매질에서의 파전파 현상에서 다양한 비선형 거동이 발생할 수도 있다. 예를 들면, 반무한 층상 지반에 놓인 구조 시스템에서는 지반과 구조물의 재료 비선형 거동, 구조물과 지반 경계에서의 비선형 경계조건(구조물 기초의 부분적 들림, 미끄러짐, 분리 현상 등) 등과 같은 비선형 지반-구조물 상호작용이 발생할 수 있다(Roesset and Tassoulas, 1982). 이러한 비선형 거동은 시간영역에서 비선형 유한요소를 사용하여 고려할 수 있다. 하지만 앞에서 언급한 무한 영역으로의 에너지 방사에 대한 해는 시간영역보다는 주파수영역에서 쉽게 얻을 수 있어서 다양한 수치 모형들이 주파수영역에서 개발되어 사용되었다. 즉, 무한 매질에서의 비선형 파전파 문제는 비선형 거동과 에너지 방사를 시간영역에서 동시에 고려하여야 하므로, 결국 무한 영역으로의 에너지 방사를 시간영역에서 얼마나 정확하고 효율적으로 모사할 수 있는지에 의해 해석의 정확성과 효율성이 결정된다. 앞에서 언급한 무한 영역의 영향을 고려할 수 있는 다양한 모형 중 고차의 흡수경계조건(Givoli, 2004; Lee and Tassoulas, 2018; 2019; Lee, 2020; 2021)과 PML은 시간영역에서의 정확성과 효율성이 동시에 보장되는 방법이라고 할 수 있다. 반면에 전달경계, 경계요소, 무한요

소와 같은 방법은 시간영역에서 convolution 형태로 표현되기 때문에, 정확성은 보장되지만 해석 시간이 길어지면 길어질수록 요구되는 계산량이 증가하여 비선형 파전파 해석에는 적절하지 않다고 할 수 있다.

이 연구에서는 층상 waveguide에서의 scalar wave 또는 SH파 전파 문제에 적용할 수 있는 새로운 고차의 흡수경계조건을 제안하고자 한다. 이를 위해 waveguide의 수직방향으로 유한 요소 이산화를 적용하여 얻은 SH파의 지배방정식을 변형하여 waveguide의 무한 영역의 영향을 나타내는 경계조건을 유도한다. 이 경계조건은 기존의 RFABC(Lee and Tassoulas, 2019)와 동등함을 보일 수 있다. 제안된 경계조건을 층상 waveguide에서의 파전파 문제에 적용하여 그 정확성과 안정성을 검증한다.

2. 층상 waveguide에서의 SH파 전파의 정식화

Fig. 2(a)에 보인 바와 같은 층상 waveguide에서의 SH파 전파에 대한 지배방정식을 정식화하고자 한다. xz 평면에 수직인 y 방향으로의 변위를 $v(x, z, t)$ 라고 하자. j 번째 요소에서 이 변위에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\mu_j \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu_j \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \rho_j \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

여기서 μ_j 와 ρ_j 는 각각 j 번째 요소에서의 전단탄성계수와 밀도이다. 응력은 다음과 같이 주어진다.

(a) Schematic view

(b) Numerical model

Fig. 2 Layered waveguide

$$\tau_{yz} = \mu_j \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2a)$$

$$\tau_{yx} = \mu_j \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2b)$$

각 요소의 경계면에서 변위 v 와 응력 τ_{yz} 는 연속이어야 한다.

$$v(x, z_j^-, t) = v(x, z_j^+, t) \quad (3a)$$

$$\mu_{j-1} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_j^+} = \mu_j \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_j^-} \quad (3b)$$

고려하는 층상 waveguide는 자유표면을 가지고 바닥에서 고정지점을 가지므로 다음의 경계조건을 만족시켜야 한다.

$$\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \quad (4a)$$

$$v(x, 0, t) = 0 \quad (4b)$$

Fig. 2(a)의 층상 waveguide에서의 변위 $v(x, z, t)$ 는 연속조건 (3)과 경계조건 (4)를 이용하여 지배방정식 (1)로부터 얻을 수 있다.

지배방정식 (1)의 해를 얻기 위하여 수직방향으로 유한요소의 개념을 적용한다. 이 연구에서는 선형의 형상함수를 가지는 유한요소만 고려하지만, 고차의 유한요소로의 확장은 어렵지 않게 수행할 수 있다. j 번째 요소에서의 변위 $v(x, z, t)$ 를 다음과 같이 근사한다.

$$v(x, z, t) = \mathbf{N}(z) \mathbf{V}^{(j)}(x, t) \quad (5a)$$

$$\mathbf{N}^{(j)}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z_{j+1}-z}{h_j} & \frac{z-z_j}{h_j} \end{bmatrix} \quad (5b)$$

$$\mathbf{V}^{(j)}(x, t) = \begin{Bmatrix} v_{j(x,t)} \\ v_{j+1(x,t)} \end{Bmatrix} \quad (5c)$$

식 (5)에 근거하여 j 번째 요소에 대한 이산화된 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$-\mathbf{A}^{(j)} \frac{\partial^2 \mathbf{V}^{(j)}}{\partial x^2} + \mathbf{G}^{(j)} \mathbf{V}^{(j)} + \mathbf{M}^{(j)} \frac{\partial^2 \mathbf{V}^{(j)}}{\partial t^2} = \begin{Bmatrix} -\mu_j \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_j} \\ \mu_j \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_{j+1}} \end{Bmatrix} \quad (6a)$$

$$\mathbf{A}^{(j)} = \frac{\mu_j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6b)$$

$$\mathbf{G}^{(j)} = \frac{\mu_j}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6c)$$

$$\mathbf{M}^{(j)} = \frac{\rho_j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6d)$$

연속조건 (3)과 경계조건 (4)를 적용하여 모든 요소에 대한 이산화된 지배방정식을 모으면 Fig. 2(a)의 층상 waveguide에 대한 지배방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$-\mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \mathbf{G} \mathbf{V} + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (7)$$

3. 층상 waveguide의 $x \geq 0$ 인 영역에 대한 경계조건

무한 층상 waveguide에서의 SH파 전파 문제에 대한 해는 Fig. 2(b)와 같이 얻을 수 있다. 무한 매질을 $-L \leq x \leq L$ 의 유한한 근역과 이와 결합하는 반무한 원역으로 분리한다. 근역의 거동은 유한요소를 사용하여 나타낼 수 있고, $x \geq L$ 또는 $x \leq -L$ 인 반무한 원역의 영향은 $x = \pm L$ 에서의 경계조건으로 표현되어 근역의 유한요소와 결합된다. 여기서는 반무한 원역의 영향을 나타내는 경계조건을 유도하고자 한다. 단, 좌표축의 원점의 위치는 해에 영향을 주기 않기 때문에, 문제를 간단히 하기 위하여 $x \geq 0$ 인 영역의 효과를 나타내는 경계조건을 유도할 것이다. $x \leq 0$ 인 영역을 나타내는 경계조건도 같은 방법으로 유도할 수 있다.

$x \geq 0$ 인 영역에서 $x=0$ 인 경계에 작용하는 j 번째 요소의 consistent nodal force는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{P}^{\infty, (j)} = - \int_{z_j}^{z_{j+1}} (\mathbf{N}^{(j)})^T \tau_{xy} \Big|_{x=0} dz = -\mathbf{A}^{(j)} \frac{\partial \mathbf{V}^{(j)}}{\partial x} \quad (8)$$

단, $\mathbf{V}^{(j)}$ 는 $x \geq 0$ 인 영역으로 전파하는 파만 고려해야 한다. 식 (8)을 모든 요소에 대하여 모으면 다음과 같이 절점력을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{P}^{\infty} = -\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathbf{M}_{exact}^{\infty} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} + \mathbf{C}_{exact}^{\infty} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{K}_{exact}^{\infty} \mathbf{V} \quad (9)$$

식 (9)에서 $x \geq 0$ 인 영역의 거동은 연산자 $-\mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x}$ 또는 $\mathbf{S}_{exact}^{\infty} = \mathbf{M}_{exact}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{C}_{exact}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{K}_{exact}^{\infty}$ 를 사용하여 표현될 수 있음을 확인할 수 있다. 하지만, $x \geq 0$ 인 영역에 대해서는 이 영역으로만 전파하는 파만을 고려해야 하는데, 이 파의 x 방향으로의 변화는 SH파의 진동수에 따라 달라진다. 즉, 식 (9)의 x 에 관한 편미분 연산자를 진동수와 무관한 형태로 표현하는 것은 불가능하다. 그렇기 때문에 $\mathbf{S}_{exact}^{\infty}$ 에 대한 정확한 표현은 일반적으로 진동수영역에서 얻어지게 된다(Tassoulas, 1981).

이 연구에서는 $\mathbf{S}_{exact}^{\infty}$ 에 대한 근사를 얻고자 한다. $\mathbf{R} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}$ 라고 하면, 식 (9)와 지배방정식 (7)은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{P}^\infty = -\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(-\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{R} \quad (10a)$$

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \mathbf{G} \mathbf{V} + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (10b)$$

한편, $\mathbf{Q} = \int \mathbf{V} dx$ 라고 하면, 지배방정식 (7)은 다음과 같이 표현된다.

$$-\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{G} \mathbf{Q} + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (11)$$

식 (11)과 식 (9), 그리고 $\mathbf{Q}$ 의 정의로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{P}^\infty = -\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(-\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(-\mathbf{G} \mathbf{Q} - \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial t^2} \right) \quad (12a)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{V} - \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (12b)$$

식 (10)과 (12)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}^\infty \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{exact}^\infty \mathbf{V} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{exact}^\infty & \mathbf{A} \\ -\mathbf{G} - \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \mathbf{S}_{exact}^\infty \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} \quad (13a)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}^\infty \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{exact}^\infty \mathbf{V} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{exact}^\infty - \mathbf{G} - \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \\ \mathbf{A} & \mathbf{S}_{exact}^\infty \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (13b)$$

식 (13)으로부터 절점력 $\mathbf{P}^\infty$ 에 대한 점화식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^\infty \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_j^{\infty,(1)} \mathbf{V} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_j^{\infty,(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R}_j \end{Bmatrix} \text{ for } j = n, \dots, 1 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{j-1}^{\infty,(1)} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{G} - \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \mathbf{S}_{j-1}^{\infty,(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R}_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^\infty \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_j^{\infty,(2)} \mathbf{V} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_j^{\infty,(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{Q}_j \end{Bmatrix} \text{ for } j = n, \dots, 1 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{j-1}^{\infty,(2)} - \mathbf{G} - \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \\ \mathbf{A} & \mathbf{S}_{j-1}^{\infty,(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{Q}_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (14b)$$

여기서, $\mathbf{S}_n^{\infty,(1)}$ 과 $\mathbf{S}_n^{\infty,(2)}$ 는 $\mathbf{S}_{exact}^\infty$ 에 대한 두가지 근사 표현이다. 식 (14)의 점화식을 시작하기 위해 $\mathbf{S}_0^{\infty,(1)}$ 과 $\mathbf{S}_0^{\infty,(2)}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{S}_0^{\infty,(1)} = \mathbf{S}_0^{\infty,(2)} = l_0 \mathbf{A} + \frac{1}{C_e} \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial t} \quad (15)$$

여기서 l_0 와 C_e 는 양수이다. $\mathbf{S}_0^{\infty,(1)} = (\mathbf{S}_0^{\infty,(2)})^T$ 이기 때문에 식 (14)로부터 $\mathbf{S}_j^{\infty,(1)} = (\mathbf{S}_j^{\infty,(2)})^T$ 임을 보일 수 있고, 최종적으로 절점력 $\mathbf{P}^\infty$ 에 대한 근사 표현을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^\infty \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_j^\infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R}_j \end{Bmatrix} \text{ for } j = n, \dots, 1 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{j-1}^\infty & \mathbf{A} \\ -\mathbf{G} - \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} & (\mathbf{S}_{j-1}^\infty)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R}_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\mathbf{S}_0^\infty = l_0 \mathbf{A} + \frac{1}{C_e} \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial t} \quad (16b)$$

$x \leq 0$ 인 영역의 경계조건은 SH파 문제의 특성으로 인해 식 (16)과 같은 형태를 지닌다.

제안된 전달경계를 사용하기 위해서는 식 (16b)의 l_0 와 C_e 를 지정해야 하는데, 이 방법에 대해 제안하고자 한다. SH파 속도가 C_s 인 균일 무한 매질에서 $v(x, z, t) = \phi e^{i(\omega t - kx - lz)}$ 의 형태로 주어지고 $+x$ 방향으로 전파하는 파동의 분산방정식 (dispersion equation)은 다음과 같다.

$$k = \left(\frac{\omega^2}{C_s^2} - l^2 \right)^{1/2} \quad (17)$$

단, $\text{Im}(k) < 0$ 이거나 $\text{Im}(k) = 0$ 일 때 $\text{Re}(k) > 0$ 이어야 한다. 식 (17)에 근거하여 ik 는 저진동수 또는 고진동수 영역에서 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (ik) = l \quad (18a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (ik) = \frac{i\omega}{C_s} \quad (18b)$$

한편, $v(x, z, t) = \phi e^{i(\omega t - kx - lz)}$ 의 형태의 파동에 대하여 $\mathbf{S}_{exact}^\infty = -\mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} = ik \mathbf{A}$ 이므로, 식 (18)의 근사식에 근거하여 식 (16b)와 같이 $\mathbf{S}_0^\infty$ 를 제안할 수 있다. 층상 지반의 두께가 H 일 때, 저진동수 영역에서 우세한 파동의 수직 방향으로의 파장은 $4H$ 이므로 $l_0 = 2\pi/4H$ 를 사용할 수 있다. 또한, C_e 의 값으로는 수직방향으로의 층상 지반의 등가 파전파 속도 $\frac{H}{\sum H_i/C_i}$ 를 사용할 수 있다. 여기서, H_i 와 C_i 는 각각 i 번째 층의 두께와 파전파 속도이다.

4. 정확성과 안정성

새로이 제안한 층상 waveguide의 $x \geq 0$ 인 영역에 대한 경계조건 (16)의 정확성과 안정성을 조사한다. 이를 위해

$\mathbf{V}(x,t) = \phi e^{i(\omega t - kx)}$ 의 형태로 주어지는 지배방정식 (7)의 해를 고려한다. 가정한 harmonic solution을 식 (7)에 대입하면 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$(k^2 \mathbf{A} + \mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M}) \phi = 0 \quad (19)$$

즉, 주어진 가진 진동수 ω 에 대해 지배방정식 (7)의 해는 식 (19)의 고유치 문제에서 얻어지는 고유값 k 와 고유벡터 ϕ 의 고유모드를 선형 조합하여 얻을 수 있다. 한편, 각각의 고유모드는 다음의 직교조건을 만족해야 한다.

$$\phi_s^T \mathbf{A} \phi_r = \delta_{rs} \quad (20a)$$

$$\phi_s^T (\mathbf{G} - \omega^2 \mathbf{M}) \phi_r = -\delta_{rs} k_s^2 \quad (20b)$$

여기서 δ_{rs} 는 Kronecker delta이다. 식 (20)의 직교조건으로부터 식 (16)의 $\mathbf{S}_j^\infty$ 도 다음의 직교조건을 만족함을 알 수 있다.

$$\phi_s^T \mathbf{S}_j^\infty \phi_r = \delta_{rs} \sigma_{s,j} \text{ for } j = n, \dots, 0 \quad (21)$$

그러므로 식 (16)의 경계조건은 s 차 고유모드에 대해 다음의 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} p_s^\infty \\ 0 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{s,j} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s \\ r_{s,j} \end{Bmatrix} \quad \text{for } j = n, \dots, 1 \quad (22a) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{s,j-1} & 1 \\ -g_s^2 - m_s^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \sigma_{s,j-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s \\ r_{s,j} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\sigma_{s,0} = l_0 + \frac{1}{C_e} \frac{\partial}{\partial t} \quad (22b)$$

여기서 $\phi_s^T \mathbf{G} \phi_s = g_s^2$, $\phi_s^T \mathbf{M} \phi_s = m_s^2$ 이다. 식 (22)를 기존의 RFABC (Lee and Tassoulas, 2019)와 비교하면, 식 (16)의 경계조건은 기존의 RFABC와 동등함을 확인할 수 있다.

SH파의 $+x$ 방향과 $-x$ 방향으로 전파하는 모드는 식 (19)의 고유값 문제에 대하여 각각 k 와 $-k$ 의 고유값을 가지고 고유벡터는 ϕ 로 동일하다. 그러므로, $\mathbf{V}(x,t) = \phi e^{i(\omega t - kx)} + R_n \phi e^{i(\omega t + kx)}$ 의 형태로 주어지는 지배방정식 (7)의 해를 사용하여 s 차 고유모드에 대한 제안된 전달경계의 반사계수를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$R_n = -\frac{\sigma_{s,n} - ik}{\sigma_{s,n} + ik} = -\left(\frac{\sigma_{s,n-1} - ik}{\sigma_{s,n-1} + ik} \right)^2 = -R_{n-1}^2 = \dots = -R_0^{2^n} \quad (23a)$$

$$R_0 = -\frac{\sigma_{s,0} - ik}{\sigma_{s,0} + ik} \quad (23b)$$

한편 $\sigma_{s,0} = l_0 + \frac{1}{C_e} \frac{\partial}{\partial t} = l_0 + \frac{i\omega}{C_e}$ 이므로, $|R_0| \leq 1$ 이고 $|R_n| \leq 1$ 임을 확인할 수 있다. 즉, 제안된 경계조건은 차수 n 이 증가할수록 그 정확성은 증가한다.

또한, RFABC는 안정하므로 (Lee and Tassoulas, 2018), 식 (16)의 경계조건도 안정하다. 특히, 식 (16)의 경계조건은 수직 방향으로의 이산화가 고려되어 있으므로 이산화된 수준에서 제안된 경계조건의 안정성도 자명하다.

기존의 RFABC (Lee and Tassoulas, 2019)와 비교하여 새로이 제안된 경계조건의 차이점은 층상 매질에도 적용하다는 점이다. 기존의 RFABC는 균일 매질에만 적용 가능하였지만, 새로이 개발된 경계조건은 수직방향으로 변위의 유한요소 이산화를 수행하기 때문에 층상 매질에도 적용이 가능하다. 이는 다음 장의 검증 예제를 통해 확인할 수 있다.

5. 검증

5.1 균일한 waveguide에서의 SH파 전파

새로이 제안한 층상 waveguide의 경계조건 (16)을 검증하기 위하여 Fig. 3의 균일한 waveguide에서의 SH파 전파 문제를 풀었다. 가지는 식 (24)의 초기 변위와 속도의 형태로 주어진다.

$$v(x,z,t=0) = x \exp[-100\{x^2 + (z-2.5)^2\}] \quad (24a)$$

$$\dot{v}(x,z,t=0) = 0 \quad (24b)$$

$-5 \leq x \leq 5$, $0 \leq z \leq 3$ 인 영역을 400×120 개의 4절점 사각형 유한요소를 사용하여 모델링한 후, $x = \pm 5$ 의 위치에 식 (16)의 경계조건을 적용하였다. 이때, 식 (16b)의 인자 $l_0 = \pi/6$, $C_e = \sqrt{3}$ 으로 설정하였다. $\delta = 1/2$, $\alpha = 1/4$ 의 Newmark 방법을 사용하여 (Bathe, 2014), $T = 8$ 까지의 응답을 계산하였다. 이때, 시간간격은 0.005로 설정하였다.

전달경계의 차수 n 을 변화시켜가며 제안된 모형의 정확성을 조사하기 위해 식 (25)의 상대오차를 계산하였다.

Fig. 3 Homogeneous waveguide

Table 1 Relative error E_n (%)

Order n	Homogeneous waveguide	2-layered waveguide
0	11.60	15.20
1	2.91	3.76
2	0.73	0.99
3	0.65	0.79
4	0.65	0.79
5	0.65	0.79

$$E_n = \sqrt{\frac{\int \int \int \{v(x, z, t) - v^{ref}(x, z, t)\}^2 dx dz dt}{\int \int \int \{v^{ref}(x, z, t)\}^2 dx dz dt}} \quad (25)$$

여기서 $v^{ref}(x, z, t)$ 는 확장된 유한요소망을 사용하여 얻은 참조해이다. n 에 따른 상대오차의 변화가 Table 1에 주어져 있다. 전달경계의 차수가 증가함에 따라 상대오차가 감소하는 것을 확인할 수 있다. 하지만, 유한요소 이산화에 의한 오차로 인해 특정값 미만으로는 감소하지 않음을 관찰할 수 있다.

Fig. 4는 전달경계의 차수 $n=3$ 인 경우에 대해 $t=0, 2, 4, 6, 8$ 일 때의 계산 결과이다. 계산 결과의 정확성을 검증하기 위하여 참조해와 비교하였다. Fig. 4에서 이 연구에서 제안한 방법을 사용하면 정확한 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

또한, 새로이 개발한 경계조건의 수치적 안정성을 검증하기 위하여 총 500,000 시간 단계, 즉 $t=2500$ 까지 계산을 수행하였다. Fig. 5는 $-5 \leq x \leq 5, 0 \leq z \leq 3$ 인 영역에 저장된 역학적 에너지의 변화를 보여주는데, 발산하지 않는 결과를 보여 준다. 즉, 이 연구에서 제안한 경계조건 (16)은 수치적으로 안정함을 확인할 수 있다.

Fig. 4 Wavefields in the homogeneous waveguide

Fig. 5 Mechanical energy in the homogeneous waveguide

5.2 층상 waveguide에서의 SH파 전파

Fig. 6의 층상 waveguide에서의 SH파 전파 문제에 식 (16)의 경계조건을 적용하여 제안한 방법의 정확성과 안정성을 검증하였다. 가지는 식 (24)와 같이 주어진다. 5.1의 예제와 동일하게 $-5 \leq x \leq 5, 0 \leq z \leq 3$ 인 영역을 400×120 개의 4절점 사각형 유한요소를 사용하여 모델링하고, $x = \pm 5$ 의 위치에 3차의 경계조건을 $l_0 = \pi/6, C_c = 1.333\sqrt{3}$ 의 인자와 함께 사용하였다. 시간간격은 0.005로 설정하고, $T=8$ 까지의 응답을 $\delta = 1/2, \alpha = 1/4$ 의 Newmark 방법으로 계산하였다.

전달경계의 차수 n 에 따른 식 (25)의 상대오차가 Table 1에 주어져 있다. 이 경우에도 전달경계의 차수가 증가함에 따라 상대오차가 감소하는 것을 확인할 수 있지만, 특정값 미만으로는 감소하지 않음을 관찰할 수 있다.

Fig. 6 2-layered waveguide

Fig. 7은 $t = 0, 2, 4, 6, 8$ 일 때의 계산 결과이다. 함께 도시한 참조해와 비교하여, 정확한 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

앞의 예제와 동일하게 $t = 2500$ 까지 계산을 수행하여 수치적 안정성을 검토하였다. Fig. 8은 계산 영역에 저장된 역학적 에너지의 변화를 보여주는데, 이 연구에서 제안한 경계조건은 수치적으로 안정함을 확인할 수 있다.

6. 결론

무한 매질에서의 파전파 현상은 토목공학, 기계공학, 조선공학, 지진학, 기상학, 해양학 등 여러 분야에서 다양한 물리적 현상을 서술하는데 활용되고 있어, 이 문제에 대한 해를 얻기 위하여 해석적 방법 또는 수치적 방법이 개발되어 사용되고 있다. 이때, 정확한 해를 얻기 위해서는 무한 영역으로의 에너지 방사를 정확히 고려해야 하고, 이를 위해 다양한 수치적 또는 역학적 모형 또는 경계조건이 개발되었다. 이 연구에서는 층상

Fig. 8 Mechanical energy in the 2-layered waveguide

waveguide에서의 scalar wave 또는 SH파 전파 문제에 적용할 수 있는 새로운 경계조건을 제안하였다. 이를 위해 waveguide의 수직방향으로 유한요소 이산화를 적용하여 얻은 SH파의 지배방정식을 변형하여 waveguide의 무한 영역의 영향을 나타내는 경계조건을 유도하였다. 층상 waveguide에서의 SH파에 대한 고유모드의 직교성을 이용하여 새로운 경계조건은 기존의 root-finding absorbing boundary condition(RFABC)와 동등함을 보였다. 이로부터 새로운 경계조건은 그 차수가 증가할수록 정확성이 증가하고, 또한 이산화된 수준에서도 안정함을 유도할 수 있다. 제안된 경계조건을 층상 waveguide에서의 파전파 문제에 적용하여 그 정확성과 안정성을 검증하였다.

이 연구에서는 SH파, 즉 scalar wave에 대한 새로운 경계조건을 제안하였다. 이 방법을 확장하여 층상 waveguide에서의

Fig. 7 Wavefields in the 2-layered waveguide

탄성파에 대한 경계조건도 유도할 수 있을 것이다. 이 경계조건은 매질의 자유표면 조건을 만족시키지 못하는 기존 RFABC의 단점(Lee and Tassoulas, 2019; Lee, 2020)을 해결할 수 있을 것으로 기대된다. 또한, 매질의 강체 기반압 조건 대신 z 축 방향으로 파를 흡수할 수 있는 경계조건을 적용하면 waveguide뿐만 아니라 반무한체(half-space)에서도 적용할 수 있는 경계조건을 개발할 수 있을 것으로 기대된다. 또한, 이 연구에서 개발된 경계조건을 다양한 비선형 scalar wave 전파 문제에 적용하여, 수치 모형의 크기를 줄이면서도 정확한 해를 얻을 수 있는 방법을 제안할 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 연구는 산업통상자원부(MOTIE)와 한국에너지기술연구원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다(No. 20201510100020).

References

- Basu, U., Chopra, A.K.** (2004) Perfectly Matched Layers for Transient Elastodynamics of Unbounded Domains, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 59, pp.1039~1074.
- Bathe, K.-J.** (2014) *Finite Element Procedures*, Second Edition, Prentice Hall, Massachusetts, USA.
- Beskos, D.E.** (1987) Boundary Element Methods in Dynamic Analysis, *Appl. Mech. Rev.*, 40, pp.1~23.
- Beskos, D.E.** (1997) Boundary Element Methods in Dynamic Analysis: Part II (1986-1996), *Appl. Mech. Rev.*, 50, pp.149~197.
- Givoli, D.** (2004) High-Order Local Non-Reflecting Boundary Conditions: A Review, *Wave Motion*, 39, pp.319~326.
- Kausel, E.** (1974) Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media, Research Report R74-11, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA.
- Lee, J.H.** (2020) Root-Finding Absorbing Boundary Conditions for Poro-elastic Waves in Infinite Media, *Soil Dyn. & Earthq. Eng.*, 129, p.105933.
- Lee, J.H.** (2021) Root-Finding Absorbing Boundary Condition for Anisotropic Scalar Waves in Infinite Media, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, <https://doi.org/10.1002/nme.6572> (accepted).
- Lee, J.H., Tassoulas, J.L.** (2018) Absorbing Boundary Condition for Scalar-Wave Propagation Problems in Infinite Media based on a Root-Finding Algorithm, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 330, pp.207~219.
- Lee, J.H., Tassoulas, J.L.** (2019) Root-Finding Absorbing Boundary Conditions for Scalar and Elastic Waves in Infinite Media, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 346, pp.592~611.
- Lim, J.-S., Son, I.-M., Kim, J.-M., Seo, C.-G.** (2016) A Speed-Up in Computing Time for SSI Analysis by p-version Infinite Elements, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 29(5), pp.471~482.
- Roesset, J.M., Tassoulas, J.L.** (1982) Nonlinear Soil Structure Interaction: An Overview, in: Datta, S.K. (Eds.), *Earthquake Ground Motion and Its Effects on Structures*, ASME, New York, pp.41~57.
- Tassoulas, J.L.** (1981) Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Media, Research Report R81-2 Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA.

요 지

무한 매질에서의 파전파 현상은 공학과 자연과학의 여러 분야에서 다양한 물리적 현상을 서술하는데 활용되고 있고, 이 문제에 대한 해를 얻기 위하여 해석적 방법 또는 수치적 방법이 개발되어 사용되고 있다. 이 문제에 대한 정확한 해를 얻기 위해서는 무한 영역으로의 에너지 방사를 정확히 고려해야 하고, 이를 위해 다양한 수치적 또는 역학적 모형 또는 경계조건이 개발되었다. 이 연구에서는 층상 waveguide에서의 scalar wave 또는 SH파 전파 문제에 적용할 수 있는 새로운 경계조건을 제안하고자 한다. 이를 위해 waveguide의 수직방향으로 유한요소 이산화를 적용하여 얻은 SH파의 지배방정식을 변형하여 waveguide의 무한 영역의 영향을 나타내는 경계조건을 유도한다. 층상 waveguide에서의 SH파에 대한 고유모드의 직교성을 이용하여, 새로운 경계조건은 기존의 root-finding absorbing boundary condition과 동등함을 보이고, 이로부터 새로운 경계조건이 차수가 증가할수록 정확성이 증가하고, 또한 이산화된 수준에서도 안정함을 유도할 수 있다. 제안된 경계조건을 층상 waveguide에서의 파전파 문제에 적용하여 그 정확성과 안정성을 검증한다.

핵심용어 : 무한 매질, waveguide, scalar wave, SH파, 파전파, 경계조건, root-finding absorbing boundary condition