압입시험을 통하여 초탄성 재료 물성치를 평가하는 단순한 방법

송재욱¹ · 김민석¹ · 정구훈¹ · 김현규^{1*}

¹서울과학기술대학교 기계자동차공학과

A Simple Method for the Estimation of Hyperelastic Material Properties by Indentation Tests

Jae-Uk Song¹, Min-Seok Kim¹, Gu-Hun Jeong¹ and Hyun-Gyu Kim^{1*}

¹Department of Mechanical and Automotive Engineering, Seoul National University of Science and Technology, Seoul, 01811, Korea

Abstract

In this study, a new simple method for the estimation of hyperelastic material properties by indentation tests is proposed. Among hyperelastic material models, the Yeoh model with three material properties (C_{10} , C_{20} , C_{30}) is adopted to describe the strain energy density in terms of strain invariants. Finite element simulations of the spherical indentation of hyperelastic materials of the Yeoh model with different material properties are performed to establish a database of indentation force-displacement curves. The indentation force-displacement curves are fitted by cubic polynomials, which are approximated as a product of third-order polynomials of (C_{10} , C_{20} , C_{30}). A regression analysis is conducted to determine the coefficients of the equations for the indentation force-displacement curve approximations. A regression equation is used to estimate the hyperelastic material properties. The present method is verified by comparing the estimated material properties with true values.

Keywords : indentation tests, hyperelastic materials, finite element analysis, regression analysis

1. 서 론

초탄성(hyperelastic) 재료는 항공기, 자동차와 같은 기계들의 부품을 비롯해서 각종 전자제품 등에 널리 쓰이고 있으며, 이러한 제품들의 역학적 거동을 정확하게 해석하기 위해서는 초탄성 재료의 물성치 평가가 필요하게 된다. 이를 위하여 초탄성 재료의 물성치를 실험적으로 측정하여야 하는데, 선형 탄성재료와 달리 비선형성의 응력-변위 거동을 보이기 때문에 물성치 평가가 어렵게 된다. 초탄성 재료 모델의 계수들을 시편 실험을 통하여 구하는 방법(James *et al.*, 1975; Ogden *et al.*, 2004; Wu *et al.*, 2016)은 시편 제작의 어려움이 있고 상대적으로 복잡한 실험을 진행해야 하며 마찰계수 등에 민감하다는 문제(Kim *et al.*, 2003)가 있다. 탄성 재료의 물성치를 간편하게 얻는 방법에

대한 연구로 압입시험(indentation tests)을 통하여 재료 물성치를 평가하는 연구들(Lee *et al.*, 1997; 2003; 2014; Hyun *et al.*, 2008)이 진행되었다. 초탄성 재료에 대하여도 압입시험을 이용해 물성치 평가에 대한 연구들(Lee *et al.*, 2004; Hwang *et al.*, 2009; Hyun *et al.*, 2012)이 수행되었다. 이 연구들에서는 많은 해석 결과를 이용하여 무차원 사상함수를 구성하였고, 사상함수에 임의의 초기 물성치 값을 대입한 후 새로운 물성치를 구하는 반복계산을 수행하여 물성치를 얻는 방법을 제시하였다. 본 연구에서는 이전의 연구들을 보다 단순화하여 압입시험의 하중-변위 곡선을 3차식으로 근사하고, 이 식의 계수값들을 초탄성 재료 물성치의 3차항의 곱으로 이루어진 회귀식으로 표현하였다. 이 회귀식을 사용하여 보다 쉽게 초탄성 재료 물성치를 평가하는 방법을 제시하고자 한다.

* Corresponding author:

Tel: +82-2-970-6309; E-mail: khg@seoultech.ac.kr

Received April 10 2019; Revised June 19 2019;

Accepted June 20 2019

©2019 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

2. 압입시험의 유한요소 모델

2.1 초탄성 재료 모델

일반적으로 초탄성 재료의 거동 해석에서 Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Ogden 모델을 많이 사용하고 있다. Neo-Hookean과 Mooney-Rivlin 모델은 간단하게 거동을 표현한다는 장점이 있지만 대변형인 경우 정확도에 한계가 있고, Ogden 모델은 대변형에서도 정확한 표현이 가능하지만 높은 차수를 가지기 때문에 많은 수의 물성치를 구해야 하는 단점이 있다(Marckmann *et al.*, 2006; Kim *et al.*, 2012). 본 연구에서는 두 모델의 장단점을 보완하여 비교적 간단하고 정확한 모사가 가능한 Yeoh 모델을 사용하였고, Yeoh 모델의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$W = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (I_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^3 \frac{3}{D_i} (J - 3)^{2i} \quad (1)$$

여기서, W 는 단위체적당 변형률 에너지 밀도, I_1 는 주연신률 불변량, J 는 탄성 체적비를 나타내며, C_{i0} 는 초탄성 물성치, D_i 는 체적 탄성계수를 의미한다. Horgan 등(2009)에 의하면 고무와 같은 초탄성 재료의 거동은 일반적으로 비압축성 혹은 약간의 압축성을 보이므로 다음과 같은 비압축성 Yeoh 모델을 사용하였다(Yeoh, 1990; 1993).

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (2)$$

2.2 유한요소해석 모델 및 경계조건

초탄성 재료 압입시험 유한요소 모델의 시편(가로=10mm, 세로=10mm)은 Abaqus/Standard 6.14의 비압축성 축대칭요소(CAX4H)를 사용하여 구성하였고, 구형 압입자(직경=1.0mm)는 Analytical Surface를 사용하여 변형이 없는 강체로 모델링하였다. 해석 모델의 크기는 압입자의 하중과 변형에 영향이 없도록 설정하였다. 시편과 압입자가 접촉하는 부분의 오차를 최소화하기 위해 압입자와 접촉하는 영역의 요소 크기를 압입자 직경의 0.01 크기로 하였으며 요소 크기가

Table 1 Material properties of Yeoh model
(CR: chloroprene rubber, SIU: silicon rubber, NBR: nitrile butadiene rubber)

	C_{i0}	CR	SIU	NBR
Tensile tests	C_{10}	1.08	0.68	0.61
	C_{20}	-0.63	-0.39	-0.28
	C_{30}	0.26	0.17	0.11

변하는 경계는 사다리꼴 형태로 요소를 구성하였다. Yeoh 모델 물성치 범위는 서로 크게 다른 세 가지 고무 Table 1(Hwang *et al.*, 2009)의 물성치를 적용하여 $C_{10}=0.6\sim 1.2$, $C_{20}=-0.6\sim 0.0$, $C_{30}=0.1\sim 0.6$ 으로 설정하였다.

Fig. 1 Finite element model for indentation tests

경계조건은 Fig. 1과 같이 시편의 대칭축의 절점은 1축 방향 변위를, 시편 하단 부의 절점은 2축 방향 변위를 고정하였고 압입자는 기준 절점(reference node)의 1축 방향 변위를 고정하고 2축 방향으로 -1.0mm의 변위를 주어 정적 해석을 진행하였다. Hyun 등(2012)에 의하면 압입시험 시의 마찰계수는 0.5이상에서 같은 압입자 반력-변위 곡선으로 수렴하므로 초탄성 재료 시편과 압입자의 마찰계수는 0.5를 부여하였다.

3. 유한요소해석 결과 분석

앞에서 설정한 Yeoh 물성치 범위 내에서 각각의 계수 값을 0.1씩 변화시키면서 총 294개의 해석을 수행하였다. 대표적인 유한요소해석 결과를 Fig. 2에 보여주고 있다. 본 연구에서는 재료 물성치 변화에 대한 각각의 유한요소해석 결과를 사용하여 미지의 초탄성 재료의 압입시험에서 얻은 반력-변위 곡선으로부터 재료 물성치를 평가하고자 한다.

3.1 초기 $P-h$ 곡선과 물성치 C_{10} 의 상관관계

압입깊이 0.1mm 이하에서 물성치에 따른 압입자 반력-변위($P-h$)곡선의 변화를 살펴보면 Fig. 3과 같이 C_{10} 에 대해서는 변화가 크지만 C_{20} , C_{30} 에 대해서는 Fig. 4, Fig. 5와

Fig. 2 Distributions of von-mises stress at indent displacements 0.1mm and 1.0mm

Fig. 3 $P-h$ curves with changing C_{10}

Fig. 4 $P-h$ curves with changing C_{20}

같이 변화가 적음을 확인할 수 있었다. 이와 같은 결과는 참고 문헌(Hyun *et al.*, 2012)에서도 유사하게 보여주고 있다. 따라서 압입 깊이가 작은 구간의 반력 P 는 C_{10} 의 영향이 지배적이라 가정하였다.

압입자 크기에 대한 영향을 제거하기 위하여 압입깊이를 압입자 직경으로 나눈 값인 h/D 를 사용하여 반력 P 와 C_{10} 의 관계를 분석하였다. 그 결과 h/D 가 0.1에서의 반력 $P_{h/D=0.1}$ 와 물성치 C_{10} 가 Fig. 6과 같이 1차 비례관계를 확인하였고,

Fig. 5 $P-h$ curves with changing C_{30}

Fig. 6 $C_{10}-P_{h/D=0.1}$ curve

이를 이용해 일차 회귀식을 구성하여 재료 물성치 C_{10} 을 구할 수 있다.

$$C_{10} = 4.3368P_{h/D=0.1} + 0.0127 \quad (3)$$

3.2 전체 $P-h$ 곡선과 물성치의 상관관계

압입깊이 1.0mm까지의 전체 $P-h$ 곡선과 초탄성 재료 물성치의 상관관계를 분석하기 위해 앞서 먼저 $P-h$ 의 무차원화를 진행하였다. 압입깊이 h 는 압입자 직경 D 로 나누어 $h' = h/D$ 로 무차원화하였고, 반력 P 는 h/D 가 0.1에서의 반력 $P_{h/D=0.1}$ 로 나누어 $P' = P/P_{h/D=0.1}$ 로 무차원화하였다. 무차원화된 $P'-h'$ 곡선 데이터의 근사 정확도를 높이기 위하여 다음과 같은 3차 곡선으로 근사하였다.

$$P' = \alpha_1(h')^1 + \alpha_2(h')^2 + \alpha_3(h')^3 \quad (4)$$

여기서, P', h' 값은 각각 무차원화를 진행한 반력, 변위 값이고 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 각각 다항식 항의 계수를 의미한다. 기존의 연구들(Lee *et al.*, 2004; Hyun *et al.*, 2012)에서는 압입자의 $P-h$ 곡선을 $W-I_1$ 평면상에 대응시키는 무차원 사상함

수를 도입하여 다항식으로 근사하였고, 이 다항식과 임의로 가정한 C_{20} , C_{30} 으로부터 $W-I_1$ 곡선을 회귀해 새로운 C_{20} , C_{30} 을 반복 계산하는 방법을 제안하였다. 하지만 본 연구에서는 이와 같은 복잡한 변환 근사와 반복계산 과정없이 압입자의 $P-h'$ 곡선을 직접 C_{10} , C_{20} , C_{30} 의 근사식으로 표현하여 간단하게 물성치를 구하는 방법을 제안하고자 한다.

위의 무차원 $P-h'$ 곡선의 계수 α_1 , α_2 , α_3 와 초탄성 물성치 C_{10} , C_{20} , C_{30} 사이의 관계식을 얻기 위해 회귀식을 구성하여 계산을 수행한 결과 정확도를 위해서는 3차 이상의 곱으로 표현된 회귀식이 필요하다고 판단하였다. 따라서 본 연구에서는 계수 α_1 , α_2 , α_3 에 대하여 다음과 같이 3차항의 곱으로 이루어진 회귀식으로 구성하였다.

$$\alpha_1 = f(C_{10}, C_{20}, C_{30}) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 Q_{ijk} C_{10}^i C_{20}^j C_{30}^k \quad (5)$$

$$\alpha_2 = g(C_{10}, C_{20}, C_{30}) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 R_{ijk} C_{10}^i C_{20}^j C_{30}^k \quad (6)$$

$$\alpha_3 = h(C_{10}, C_{20}, C_{30}) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 S_{ijk} C_{10}^i C_{20}^j C_{30}^k \quad (7)$$

여기서, f, g, h 는 C_{10} , C_{20} , C_{30} 를 변수로 가지고 각각 α_1 , α_2 , α_3 를 나타내는 함수이고, Q_{ijk} , R_{ijk} , S_{ijk} 는 각 함수에서 항의 계수를 의미한다.

앞에서 설명한 294개의 유한요소해석에서 얻은 전체 데이터에 최소자승법을 사용하면 위 회귀식의 계수 Q_{ijk} , R_{ijk} , S_{ijk} 를 구할 수 있고 식 (5)~(7)의 3개 근사식을 얻게 된다.

4. 초탄성 재료의 물성치 평가

4.1 물성치 평가 과정

Fig. 7은 본 연구에서 제시한 단순한 초탄성 재료 물성치 평가 방법의 흐름도를 보여주고 있다. 먼저 h/D 가 0.1에서 반력 $P_{h/D=0.1}$ 를 획득한 뒤 식 (1)에 대입하여 물성치 C_{10} 를 계산한다. 다음으로 h/D 가 1.0 일 때의 압입 시험 반력-변위 데이터를 식 (4)의 $P-h'$ 곡선으로 근사하여 α_1 , α_2 , α_3 를 결정한다. 앞에서 얻은 C_{10} 와 α_1 , α_2 , α_3 를 식 (5)~(7)에 대입하고 Newton-Raphson 방법으로 비선형 연립방정식을 풀어서 나머지 2개의 물성치 C_{20} , C_{30} 를 구하게 된다.

4.2 검증 결과

임의의 초탄성 재료 물성치를 가지는 유한요소해석 모델에

Fig. 7 Flow chart of the estimation process of hyperelastic material properties

Table 2 Relative errors in estimating hyperelastic material properties

	C_i	Exact values	Estimated values	Relative errors(%)
Case 1	C_1	0.77	0.7773	0.95
	C_2	-0.14	-0.1387	0.93
	C_3	0.32	0.3206	0.18
Case 2	C_1	0.84	0.8383	0.20
	C_2	-0.33	-0.3329	0.88
	C_3	0.27	0.2751	1.88
Case 3	C_1	1.14	1.1304	0.84
	C_2	-0.53	-0.5407	2.02
	C_3	0.58	0.5973	2.98
Case 4	C_1	1.8	1.7771	1.27
	C_2	-0.8	-0.793	0.87
	C_3	0.5	0.5032	0.64
Case 5	C_1	2.0	2.0166	0.83
	C_2	-1.0	-0.9872	1.28
	C_3	0.4	0.3990	0.25

대해 압입시험의 해석을 수행하고 얻은 압입자 반력-변위로부터 본 연구에서 제안한 방법을 사용하여 초탄성 재료 물성치를 평가하였다. 평가된 초탄성 재료 물성치와 오차를 Table 2에 보여주고 있다. 여기서 적용한 물성치는 Table 1의 물성치 범위 안에 포함되는 5가지 새로운 초탄성 재료를 적용하였으며 물성치 평가결과 모두 상대 오차 3%이내의 낮은 오차를 보여 주었다. 본 연구에서는 Table 1의 물성치 범위 이내의 다양한 초탄성 재료를 평가하였으며, 대부분 우수한 물성치 평가가 수행되었다. 하지만 Table 1을 벗어나는 물성치에 대하여는 오차가 커지는 결과를 얻었는데, 초탄성 재료 물성치 데이터를 구축한 범위 이내에서는 본 연구에서 제시하는 방법이 유효하다는 것을 알 수 있었다.

5. 결 론

본 논문에서는 압입시험을 이용해 초탄성 재료 물성치를 평가하는 단순한 방법을 개발하였고 수치적으로 검증하였다. 일정 범위 내에서 초탄성 재료 물성치를 변화시키면서 압입 시험에 대한 유한요소해석을 수행하고 압입자 반력-변위 데이터를 획득하였다. 여기서 구축된 데이터를 이용하여 초탄성 재료 물성치를 예측하는 회귀식을 개발하였으며, 임의의 초탄성 재료에 대하여 본 연구의 방법을 적용하고 오차를 계산하였다. 초탄성 재료 물성치 평가는 압입시험 데이터를 구축하기 위하여 적용한 물성치 범위 이내에서는 상당히 우수한 결과를 보여주었다. 초탄성 물성치 평가에서 데이터 구축 영역을 분리하여 구축하고 재료 특성에 따라 다른 데이터 영역을 사용한다면 보다 개선된 방법이 될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 연구는 서울과학기술대학교 교내학술연구비 지원을 받아 수행되었습니다.

References

- Horgan, C.O., Murphy, J.G. (2009) On The Volumetric Part of Strain-Energy Functions used in the Constitutive Modeling of Slightly Compressible Solid Rubbers, *Int. J. Solids & Struct.*, 46, pp.3078~3085.
- Hwang, K.M., Oh, J.S., Lee, H.Y. (2009) Enhanced Spherical Indentation Techniques for Rubber Property Evaluation, *Korean Soc. Mech. Eng. A*, 33(12), pp.1357~1365.
- Hyun, H.C., Lee, J.H., Lee, H. (2008) Mathematical Expressions for Stress-Strain Curve of Metallic Material, *Korean Soc. Mech. Eng. A*, 32(1), pp.21~28.
- Hyun, H.C., Lee, J.H., Kim, M., Lee, H. (2012) A Spherical Indentation Technique for Property Evaluation of Hyperelastic Rubber, *J. Mater. Res.*, 27(20), pp.2677~2690.
- Kim, B., Lee, S.B., Lee, J., Cho, S., Park, H., Yeom, S., Park, S.H. (2012) A Comparison Among Neo-Hookean Model, Mooney-Rivlin Model, and Ogden Model for Chloroprene Rubber, *Int. J. Precis. Eng. & Manuf.*, 13, pp.759~764.
- Kim, W.D., Kim, D.J., Kim, W.S., Lee, Y.S. (2003) A Study on the Equi-biaxial Tension Test of Rubber Material, *Trans. Korean Soc. Automot. Eng.*, 11(5), pp.95~104.
- Lee, H.J., Kim, K.B., Lee, B.S., Lee, B.S. (2003) Analysis of True Stress-True Strain Relations through the Modeling of Ball Indentation Test, *Korean Soc. Mech. Eng. Spring Conf.*, pp.2660~2665.
- Lee, H.Y., Lee, J.H. (2004) Software and Hardware Development of Micro-indenter for Material Property Evaluation of Hyper-Elastic Rubber, *Korean Soc. Mech. Eng. A*, 28(16), pp.816~825.
- Lee, J.H., Kwon, D. (1997) Evaluation of True Stress-True Strain Curve through Continuous Indentation Test, *Korean J. Met. & Mater.*, 35(12), pp.1616~1625.
- Lee, S., Jun, Y., Kim, H.G. (2014) A Study on the Evaluation of Stress-strain Relationships of Materials by Indentation Tests, *Korean Soc. Mech. Eng. Fall Conf.*, pp.2070~2072.
- Marckmann, G., Verron, E. (2006) Comparison of Hyperelastic Models for Rubberlike Materials, *Rubber Chem. & Technol.*, 79, pp.835~850.
- Ogden, R.W., Saccomadi, G., Sgura, I. (2004) Fitting Hyperelastic Models to Experimental Data, *Comput. Mech.*, 34, p.484.
- Wu, Y., Wang, H., Li, A. (2016) Parameter Identification Methods for Hyperelastic and Hyper-Viscoelastic Models, *Appl. Sci.*, 6(12), p.386.
- Yeoh, O.H. (1990) Characterization of Elastic Properties of Carbon-black-filled Rubber Vulcanizates, *Rubber Chemistry and Technology*, 63, pp.792~805.
- Yeoh, O.H. (1993) Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber, *Rubber Chem. & Technol.*, 66, pp.754~771.

요 지

본 논문에서는 압입시험을 통해서 초탄성 재료 물성치를 평가하는 간단한 방법을 제시하였다. 초탄성 재료 모델 중, 3개의 물성치(C_{10} , C_{20} , C_{30})를 가지는 Yeoh 모델을 선택하여 주연신률로 표현되는 변형률 에너지 밀도를 적용하였다. Yeoh 물성치를 변화시키며, 구형 압입시험 유한요소해석을 수행하여 압입자 반력-변위 곡선을 획득하였다. 압입자 반력-변위 곡선을 3차 다항식으로 근사하였고, 이 다항식을 물성치(C_{10} , C_{20} , C_{30})의 3차 곱으로 근사된 3차 다항식으로 표현하였다. 압입자 반력-변위 곡선 근사를 위해 회귀분석을 진행하여 수식들의 계수를 결정하였으며, 이 회귀식을 이용하여 초탄성 재료의 물성치를 평가하였다. 초탄성 재료 물성치 평가를 수행하고 오차를 비교하여 유효성을 보여 주었다.

핵심용어 : 압입시험, 초탄성 재료, 유한요소해석, 회귀 분석