연속체 요소를 사용한 유한요소해석의 휨 모멘트 계산 방법 및 최적의 요소 크기

허 지 헤¹ · 김 한 수^{1*}

¹건국대학교 건축학과

Bending Moment Calculation Method and Optimum Element Size for Finite Element Analysis with Continuum Elements

Ji-Hye Heo¹ and Han-Soo Kim^{1*}

¹Department of Architecture, Konkuk Univ, Seoul, 05029, Korea

Abstract

When designing a reinforced concrete member using nonlinear finite element analysis results, the bending moment at the critical section should be calculated. In this paper, a bending moment calculation method using the results of reinforced concrete finite element analysis(FEA) using continuum elements is presented and the optimum element size according to the order of the displacement function of the finite element is proposed. The bending moments calculated by integrating the stresses from the FEA are compared with the bending moments calculated using the static equilibrium conditions. In the method of integrating the stress, both the stress due to the reinforcing bar and the stress of the concrete are considered. In addition, various factors affecting the accuracy of the stresses calculated by the FEA were analyzed and the influence of the displacement function and the element size was verified. If the purpose of the analysis is to roughly observe the behavior of the members, it is appropriate to use the first order displacement function and the element size should be about 25% of the section height of the analytical model. When the bending moment of a member with high accuracy is required, it is suggested that the secondary displacement function be used and the element size be 12.5%.

Keywords : reinforced concrete, nonlinear analysis, bending moment, nodal stress, element size

1. 서 론

건축구조 해석분야에서는 비용, 공간, 시간상의 이유로 실제 구조물을 통한 실험을 직접하기 어려운 경우가 대부분이다. 그래서 유한요소법이 적용된 프로그램으로 수치해를 계산하는 해석적 연구가 많이 진행되고 있다.

유한요소해석은 원하는 해석결과에 따라 차원, 요소 종류, 변위 함수 등을 적절하게 선택하여 구조물의 형태와 재료, 해석원리 등을 모델링하는 과정이 필요하다. 요소의 종류로는 연속체(Continuum 또는 Solid), 트러스(Truss), 쉘(Shell) 등이 있다. 여기서 연속체 요소는 선형 해석이나 소성, 대 변

형 등을 포함하는 복잡한 비선형 해석에 사용될 수 있어 대부분의 구조물 정밀 해석연구에서 사용되고 있다. 특히 구조물의 실제 형태를 표현하고 거동을 정확하게 검토하기 위해서는 2차원보다 더 세밀한 해석이 가능한 3차원의 연속체 요소를 사용해야 하는데, 이 요소는 각 x , y , z 축에 대한 3개의 변위 자유도만을 지니고, 회전 자유도를 포함하지 않기 때문에 휨 모멘트와 같은 수치해가 유한요소해석의 직접적인 결과로 나오지 않는다.

그러나 ACI code(2008)나 콘크리트 구조 기준(KCI, 2012)에서처럼 휨 부재는 설계 휨강도가 소요 휨강도보다 커야하기 때문에 휨 모멘트는 유한요소해석 후에 필수적으로

* Corresponding author:

Tel: +82-2-2049-6110; E-mail: hskim@konkuk.ac.kr
Received August 7 2017; Revised November 23 2017;
Accepted November 27 2017

©2018 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

확인해야 할 부재의 단면력 중 하나이다. 철근콘크리트 보나 슬래브처럼 휨을 지지하는 부재에서 인장이 생기는 부분은 철근으로 보강시켜야 하는데 이 때 철근량 산정의 기준이 휨 모멘트이기도 하다. 또한 철근콘크리트는 복합 재료로서 부재의 전체적인 거동에 각각의 재료가 영향을 끼치는 부분이 다르므로 이를 확인하기 위해서는 각 재료의 모멘트 거동을 따로 살펴 보기도 한다.

그러나 연속체 요소를 사용하면 모멘트가 바로 도출되지 않기 때문에 보통 두 가지 방법을 이용해 모멘트를 확인한다. 첫 번째는 하중과 거리를 이용한 정역학적인 방법이다. 이론은 간단 하지만 2방향 슬래브나 부정정 구조물인 경우에는 복잡해 진다. 그리고 이런 경우 입력한 하중에 의한 결과이므로 구조물에 어떠한 미시적 영향이 있는지는 알기 힘들다. 그래서 두 번째로 유한요소해석의 결과를 이용해 모멘트를 확인한다. Hu(2004)는 응력을 적분하여 휨 모멘트를 계산하였고, Jie(2013)는 응력을 적분하는 방법과 변위를 미분하는 방법을 사용하였다. Yu(2016)는 응력을 적분해 콘크리트와 철근의 모멘트 거동을 각각 검토하였다.

유한요소해석 시 요소의 크기는 해석의 결과 값에 영향을 미치는 요인 중 하나이기 때문에 최적의 요소 크기를 찾는 것이 중요하다. Chaudhari(2012)는 요소 크기에 따른 해석 결과를 비교·분석하였다. 해석결과에 영향을 주는 다른 요인은 변위 함수의 차수이다. 이는 직접적으로 적분점 수에 영향을 미친다. 이에 본 논문에서는 자유도의 수가 정해지는데 영향을 미치는 두 가지 요인을 이용하여 해석시간을 줄이면서도 휨 모멘트 계산이 정해에 가까워지는 최적의 요소 크기를 제안한다.

본 논문에서는 유한요소해석 프로그램인 Abaqus를 사용하여 연속체 요소를 사용했을 때 응력으로부터 휨 모멘트를 계산하는 기존의 이론을 철근콘크리트에 맞게 구체화시킨 후 계산식에 대한 정확도를 판별한다. 또한 해석 과정에서 응력 값에 영향을 주는 변수에 대해 비교·분석한다. 변수는 변위 함수의 차수와 요소의 크기로 서로 다른 조건에서의 해석을 통해 응력을 통한 휨 모멘트 계산 방법에 적합한 변위 함수와 최적의 요소 크기를 제시한다.

2. 유한요소를 이용한 부재 내력 해석

응력으로 휨 모멘트를 계산할 수 있는 방법에 대한 기본 근거 이론과 응력의 오차에 영향을 미치는 요인에 대해 소개한다. 그리고 철근콘크리트 구조물에서 사용할 수 있게 식을 구체화 하여 실제 유한요소해석 프로그램을 통한 해석 모델들에 계산 방법을 적용하여 휨 모멘트를 구한다. 또한 이에 대한 오차를 분석하여 최적의 해석 및 계산 방안을 제안한다.

2.1 휨모멘트 계산 방법

휨 모멘트는 작용하는 하중에 대해 부재가 회전하려는 성질을 나타내는 부재의 단면력이다. 응력을 이용해 휨 모멘트를 계산 하는 방법은 Timoshenko(1951)와 Cook(1989)의 이론을 이용하였다. 이 이론은 미소단면의 응력에 중립축까지의 거리를 곱한 값들을 전체 단면적에 대하여 합하면 해당 단면에서의 휨 모멘트와 같다는 것이다. 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$M = \int_A \sigma_x y dA \quad (1)$$

여기서, σ_x 는 x 축 방향의 응력, y 는 미소단면에서 중립축까지의 거리를 나타낸다. 위 식을 이용하기 위해서는 응력의 수치를 확인하는 점을 결정해야 한다. 본 연구에서는 적분점이 요소 내에 존재해 시작적으로 확인이 불가능하기 때문에 절점에서의 응력을 이용하였다. 또한 2차 변위 함수는 모서리 내에도 절점이 추가적으로 존재하는데 변위 함수의 차수가 응력에 미치는 영향만을 고려하고, 동일한 절점 위치에서의 비교를 위해 요소의 꼭짓점에 위치한 절점에서만 응력 데이터를 도출하였다.

휨 모멘트를 계산하기 위해서는 우선 도출된 응력 수치에 해당 절점의 위치와 중립축 사이의 거리를 곱해야 한다. 응력과 중립축까지의 거리를 곱하게 되면 이차함수의 곡선이 된다. 이 때 곡선을 적분하는 방법으로 Simpson의 적분 법칙(composite simpson's rule)을 사용하였다(Atkinson, 1989). 이 방법은 데이터와 데이터 사이를 2차 함수 형태로 근사시켜서 곡선 아래의 면적을 계산하므로 정확도가 매우 높다. 그리고 구하고자 하는 단면의 크기에 걸쳐 동일한 크기로 구간을 나누어야 한다. 따라서 요소는 동일한 크기여야 한다. 하지만 구하고자 하는 위치에서만 동일한 크기라면 요소의 모양은 상관없다. 다만, 동일한 구간이 아닐 경우에도 Simpson의 법칙을 이용할 수는 있지만 중간 값을 추정해야 하고 식에 의한 오차가 생기므로 사용하기 어렵다. 다만 이러한 과정은 콘크리트에만 해당이 되기 때문에 콘크리트와 철근의 휨 모멘트를 따로 계산한 뒤 합해서 단면의 전체 휨 모멘트를 구하였다. 철근의 휨 모멘트 계산은 모델링 기법과 상관없이 적용할 수 있도록 철근의 수와 단면적을 이용하였다. 휨 모멘트를 구하는 최종 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^n \sigma_{xi} y_i A_a + \sum_{j=1}^N \sigma_{xj} y_j A_s \\ &= \frac{h}{3n} (\sigma_{x1} y_1 + 4\sigma_{x2} y_2 + 2\sigma_{x3} y_3 + \dots + \sigma_{xn} y_n) b \\ &\quad + \sigma_{xj} y_j (N \cdot A_s) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, h 는 모델의 높이로 보나 슬래브의 두께, n 은 높이를 나눈 구간의 수, b 는 모델의 폭이다. σ_{xi} 와 σ_{xj} 는 i 나 j 번째의 요소에서의 x 축 방향 응력이다. N 은 배근된 철근의 수를 나타낸다. y 는 절점에서 중립축까지의 거리로 중립축의 위치는 해석 후 콘크리트의 응력의 형태를 근거로 결정하였다. 응력이 (-) 음수로 나오는 데이터 점과 (+) 양수로 나오는 데이터 사이의 기울기를 통해 응력이 0이 되는 위치를 추정하여 중립축으로 설정하였다.

2.2 응력 오차의 원인

유한요소법에서 변위와 같은 기본 값들은 요소의 절점에서 바로 구해진다. 그러나 응력, 변형률 등의 수치는 요소 내부에 있는 점, 예로 가우스 적분점 등에서 계산되어 절점의 좌표로 외삽(extrapolation)시켜 절점에서의 수치를 구한다(Cook, 1995). 따라서 본 논문에서 절점의 응력을 이용하기 때문에 적분점의 응력 값이 절점으로 외삽되는 과정의 오차를 포함하고 있다. Durand(2014)는 절점으로 외삽시키는 방법을 적분점과 절점의 수 차이에 따라 제안했다. 여기서 오차는 다음과 같다.

$$E = \sum_{j=1}^m (\overline{W_j} - W_j)^2 \quad (3)$$

여기서, $\overline{W_j}$ 는 요소의 보간 함수를 이용해 절점에서의 값을 적분점으로 보간시킨 값이다. W_j 는 프로그램이 적분점에서 계산한 값으로 적분점의 수 m 만큼 두 값의 차이를 제공하여 더하면 오차가 계산된다. 이와 마찬가지로 Chandrupatla와 Belegundu(2002)도 적분점과 절점의 오차를 다음과 같이 표현하였다.

$$E = \sum_e (s - a)^T (s - a) \quad (4)$$

s 는 절점에서 적분점으로 보간된 값의 벡터이고, a 는 적분점에서의 실제값이다. e 는 해당되는 요소를 의미한다.

그리고 한 절점에 관여되는 적분점의 수가 일대일로 대응하지 않기 때문에 오차가 추가적으로 더 발생한다. Fig. 1과 같이 한 절점을 네 개의 요소가 공유하고 있을 때, 4개의 적분점에서 각각 외삽시킨 후 가중 평균치로 한 절점에서의 응력 수치를 계산한다. 그래서 절점에서의 응력 수치는 4개의 적분점이 한 절점으로 외삽되면서 생기는 오차에다가 외삽된 4개의 수치가 평균이 되는 오차까지 감안해야 한다(Abaqus, 2014). 사용자의 편의성을 위해 절점의 응력을 도출하기 위한 과정을

Fig. 1 Relation between Node(●) and Integration point(★)

절점을 적분점의 위치로 보간시키는 과정을 역으로 한다. 절점을 적분점으로 보간하기 위해서는 형상함수를 이용한다. 4점 사각형 요소를 예로 들면 다음과 같다(Logan, 2012).

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-s)(1-t)}{4} & N_2 &= \frac{(1+s)(1-t)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+s)(1+t)}{4} & N_4 &= \frac{(1-s)(1+t)}{4} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sigma_n = \sum N_i \sigma_i$$

여기서, s 와 t 는 적분점의 좌표계이고, i 는 적분점을 의미한다. σ_n 은 절점의 응력이다. 기본적으로 적분점의 좌표계와 전체 좌표계 사이의 관계를 정한 이후 위 식들을 사용해 적분점의 응력을 절점으로 외삽시킨다.

그리고 모델링의 적절함으로부터 발생하는 요인이 있다. 예를 들어 휨 모멘트를 계산하고자 하는 단면 위치에 바로 하중이 가해지는 경우이다. 이 때 그 지점의 요소가 집중적으로 눌리기 때문에 압축 응력이 주변부보다 높게 측정된다. 또한, 순수 휨을 받는 경우가 아니라면 추가적인 축 하중이 발생한다. 따라서 본 연구의 주제에서 벗어나서 응력에 불필요한 영향을 미치는 위의 두 효과를 배제하기 위해 순수 휨을 받는 지점의 응력을 이용해 휨 모멘트를 계산하였다.

그리고 해석 시 요소 크기와 변위함수의 차수가 수치해석 결과에 영향을 미치기 때문에 요소 크기별로 1차 요소와 2차 요소로 나누어 해석을 수행하였다. 특히 휨 모멘트를 계산하는 과정에 필요한 응력은 단면의 높이방향에 의존하기 때문에 보의 높이방향으로만 요소 크기를 다르게 하였다. 요소 크기의 종횡비에 따른 영향은 매우 미미한 차이의 결과를 보여 보의 길이 방향과 폭 방향으로의 요소 크기를 같게 해 높이 방향의 크기에 관한 효과만 고려하여 해석한 결과로 분석하였다.

2.3 유한요소 모델링 설정

두 가지의 모델을 설정하여 본 연구를 수행하였다. 첫 번째 모델은 Carpinteri(2011)의 실험체로 길이 1400의 단순보이다. 이 실험은 3점 휨 실험은 균열 양식과 연성 취성 이행에

Fig. 2 Model 1's Geometric(mm)

Fig. 3 Model 2's Geometric(mm)

대한 철근비의 영향을 알아보기 위해 시행되었다. 본 논문에서는 보 중앙에서 순수 휨이 발생하도록 양측의 두 지점에서 하중을 가하는 4점 휨 실험으로 바꾸어 해석하였다. 철근은 지름 8mm를 사용하였고, Fig. 2에 모델에 대해 자세히 나타내었다.

두 번째 모델은 Abaqus Benchmarks Guide에서 예제로 사용된 Jain(1974)의 실험이다(Abaqus, 2014). Jain은 철근콘크리트 슬래브의 항복 기준을 표현하기 위해 작은 규모의 슬래브로 실험한 것으로 Fig. 3을 통해 이 모델의 형태를 알 수 있다. 이 때 재료 성질은 Abaqus Benchmarks Guided와 동일하게 Gilbert(1982)의 물성치를 사용하였다.

두 모델의 콘크리트는 Homogeneous solid를 이용한 3차원 연속체 응력요소로 모델링하였고, 철근은 surface의 Rebar layer로 모델링하여 완전 구속 상태로 콘크리트와 연결시켰다. 이러한 모델링을 기본으로 하여 변위 함수의 차수와 보의 깊이 방향으로의 요소 크기만을 다르게 하여 각 해석 모델마다 총 10개의 비교 실험체를 만들었다. 그룹 A, B는 보 모델, C와 D는 슬래브 모델로 그룹 A와 C는 1차 변위 함수, 그룹 B와 D는 2차 변위 함수를 사용하였다. 그룹별로 모델의 높이 방향 길이에 따라 요소의 크기를 50%, 25%, 12.5%, 10%, 6.25%로 설정해 나누었다. Table 1에 모델의 요소 특징에 대해 나타내었다.

철근의 거동은 완전 소성으로 표현하기 위해 Plasticity를 이용하였고, 콘크리트는 취성 재료를 표현하기 위해 사용되는 Concrete Damaged Plasticity(CDP)를 이용하였다. CDP는 콘크리트의 압축과 인장 거동을 표현할 수 있는 모델로서 파괴

Table 1 Model's mesh properties

		Name	Number of element	Size of element (%)
Beam (Model 1)	Linear (Group A)	B-L2	2	50%
		B-L4	4	25%
		B-L8	8	12.5%
		B-L10	10	10%
		B-L16	16	6.25%
	Quadratic (Group B)	B-Q2	2	50%
		B-Q4	4	25%
		B-Q8	8	12.5%
		B-Q10	10	10%
		B-Q16	16	6.25%
Slab (Model 2)	Linear (Group C)	S-L2	2	50%
		S-L4	4	25%
		S-L8	8	12.5%
		S-L10	10	10%
		S-L16	16	6.25%
	Quadratic (Group D)	S-Q2	2	50%
		S-Q4	4	25%
		S-Q8	8	12.5%
		S-Q10	10	10%
		S-Q16	16	6.25%

면에 대한 변수는 ABAQUS에서 제공하는 기본값(0.1, 1.16, 0.667, 0)을 사용하였다. 압축거동의 응력-변형률 값과 인장 거동에서의 파괴 에너지는 CEB-FIP 2010을 사용하여 다음과 같이 계산하였으며 단위는 MPa이다(CEB-FIP 2010; 2010).

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = - \left(\frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k-2) \cdot \eta} \right) \quad (6a)$$

$$G_F = 0.073 \cdot f_{cm}^{0.18} \quad (6b)$$

여기서, f_{cm} 은 콘크리트의 압축강도, η 는 ϵ_c/ϵ_{cl} 로 최대 압축 응력에서의 변형률에 대한 현재 변형률의 비이며, k 는 초기 탄성 계수 E_a 를 원점에서 최대 압축 응력까지의 활선 계수 E_{cl} 로 나눈 소성 상수로 CEB-FIP 2010의 표5.1-8에 제시되어 있다. 이 식에 의해 도출된 응력 σ_c 와 해당 변형률 ϵ_c 를 콘크리트의 압축 강도 데이터로 사용하였다.

2.4 해석 결과 및 고찰

철근 콘크리트 단순보와 슬래브의 해석 결과로 하중-변위 곡선을 Fig. 4와 Fig. 5에 각각 나타내었다. 하중은 해석의 결과 값인 지점 반력이며, 변위는 모델 바닥의 정중앙에서 도출한 값이다.

Fig. 4와 5에 표시된 균열과 극한은 균열이 일어나는 위치와

Fig. 4 Load-Displacement of model 1

Fig. 5 Load-Displacement of model 2

Table 2 Cracking and ultimate point of Model 1

	Craking point	Ultimate point
Moment (kN·mm)	2517.825	8347.196
Load (kN)	6.294	20.867
Displacement (mm)	0.175	2.499

Table 3 Cracking and ultimate point of Model 2

	Craking point	Ultimate point
Moment (kN·mm)	389.823	835.006
Load (kN)	2.564	5.493
Displacement (mm)	0.438	2.845

극한 강도를 나타낸다. 각각의 모멘트를 기준으로 하중과 변위를 계산하였다. 균열 모멘트와 강도, 극한 모멘트와 강도 그리고 각각의 중앙에서의 처짐을 다음과 같이 계산하였고 결과를 Table 2와 Table 3에 나타내었다. 먼저 각각의 모멘트를 다음과 같이 계산한다.

$$M_{\sigma} = \frac{f_r I_g}{h/2} \quad (7a)$$

$$M_u = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (7b)$$

여기서, f_r 은 휨 파괴 강도, I_g 는 관성 모멘트를 의미한다. 균열 모멘트를 구할 때는 관성 모멘트 I_g 와 휨 파괴 강도 f_r 을 이용하고, 극한 모멘트를 구할 때는 유효단면 2차 모멘트 I_e 를 사용한다. 두 모멘트를 계산한 뒤 2점 하중을 받는 보의 정역학적 이론을 이용하여 역으로 하중을 계산한다. 여기서 x 는 지점으로부터 하중까지의 거리이다.

$$M = p \cdot (L - x) \quad (8)$$

이후 모멘트를 두 번 적분하면 처짐이 나오는 다음의 식을 이용하여 변위를 계산한다(Hibbeler, 2012).

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (9a)$$

$$v = -\frac{Px(4x^2 - 3L^2)}{24E_c I_e} \quad (9b)$$

여기서, v 가 구하고자 하는 처짐량이 된다. 두 모델 모두 균열이

(a) Group A

(b) Group B

Fig. 6 Error of bending moment by proposed calculation method of model 1

시작되는 위치와 극한 강도의 해석 결과의 위치가 이론과 유사한 것으로 보아 연속체 요소를 이용한 각 모델들의 유한요소해석이 타당한 것으로 본다.

해석 모델의 하중-변위 결과를 이용한 정역학적인 휨 모멘트 계산 방법인 (하중×거리)로 계산한 정역학적 휨 모멘트와 앞서 제안한 계산식을 사용한 휨 모멘트의 오차를 전체적으로 비교해 보았다. 이 때 극한 모멘트 이후의 거동은 사용성 뿐만 아니라 안전성이 없다는 점을 고려해 결과 분석에서 배제한다.

Fig. 6과 7에 정역학적 계산 방법과 제안한 계산 방법의 오차를 나타내었다. 네 가지의 그래프를 비교하여 변위 차수와 요소 크기에 따른 특징을 알 수 있다. 각각의 모델 내에서 1차 변위 함수 사용 모델과 2차 변위 함수 사용 모델을 비교하면 2차일 때가 1차일 때보다 2배 이상 적다. 1차 변위 함수 사용 시에는 오차가 20%를 웃도는 반면, 2차 변위 함수를 사용한 모델들의 오차는 5%보다 적다. 모델의 거동 구간에 따라 보게 되면 1차 변위 함수인 그룹 A, C는 선형 탄성 구간에서의 응력이 이론 응력과의 오차가 20~40% 정도지만 2차 변위 함수인 그룹 B, D는 4% 이내이다. 이를 Table 4와 5에 수치로 자세히 나타내었다. 여기서 top은 보 중앙의 맨 위 절점의 의미 하며 이론 응력은 다음과 같이 계산하였다(Gere, 2004).

(a) Group C

(b) Group D

Fig. 7 Error of bending moment by proposed calculation method of model 2

Table 4 Error of stress in linear part of model 1

Error (%)	B-L2	B-L4	B-L8	B-L10	B-L16
Top	25.02	24.20	22.85	22.60	22.23
Error (%)	B-Q2	B-Q4	B-Q8	B-Q10	B-Q16
Top	4.36	3.60	3.62	3.75	3.93

Table 5 Error of stress in linear part of model 2

Error (%)	S-L2	S-L4	S-L8	S-L10	S-L16
Top	-43.705	-38.408	-35.363	-34.716	-33.721
Error (%)	S-Q2	S-Q4	S-Q8	S-Q10	S-Q16
Top	-3.855	-3.879	-3.897	-3.901	-3.904

$$\sigma_{\max} = -\frac{M \cdot y}{I} \quad (10)$$

탄성 구간에서의 오차 비교를 통해 변위 함수에 따른 오차가 1차 변위 함수가 2차 변위 함수에 비해 2~7배까지 차이가 난다는 것을 확인할 수 있다. 그리고 보의 높이 방향으로 요소 크기가 50%인 B(S)-L(Q)2는 모델의 형태와 변위 함수 차수에 따라 오차의 범위가 크게 차이가 나며 오차 자체도 크다. 하중-

변위 결과에서도 이론과 가장 차이가 큰 요소로서 정확도와 신뢰도 면에서 실제 해석에 사용할 수 없다. 그리고 요소가 25% 크기인 모델들과 1차 변위 함수인 모델들은 모델 형태나 조건에 상관없이 해석의 전체 범위 내에서 오차가 일정하지 않기 때문에 정밀 해석 시에는 적절하지 않다.

모델 형태와 조건에 상관없이 2차 변위 함수를 사용할 경우에는 요소의 크기가 25%인 모델은 휨 모멘트 계산 결과를 10%정도 오차로 수용할 수 있고, 요소 크기가 6.25% 이하부터는 5% 오차로 신뢰할 수 있다. 요소가 모델 높이의 6.25% 이하라면 1/2배가 되어도 오차가 거의 줄어들지 않기 때문에 해석의 시간을 고려하면 너무 작은 크기의 요소는 필요하지 않다.

위의 결과들을 토대로 해석의 목적에 따라 적절한 변위 함수와 요소 크기를 선택할 수 있다. 부재의 변형 정도를 보는 거시적인 목적이나, 전체적인 거동의 변화를 살펴보는 경우에는 1차 변위 함수를 쓰면서도 50~25%의 적은 요소 크기만으로도 결과를 수용하기에 적절하다. 하지만 부재의 내력을 살펴보는 정밀 해석 시에는 2차 변위 함수로 모델의 6.25% 이하의 요소 크기를 사용해야 5% 이내의 오차를 지닌다.

3. 결 론

본 논문에서는 응력 계산에 영향을 주는 여러 요인들을 고려하여 철근콘크리트 부재에 맞도록 응력으로 휨 모멘트를 계산할 수 있는 이론을 구체화시켜 제안하였다. 그리고 단순보와 슬래브의 4점 휨 실험 모델에 유한요소법으로 해석한 결과에 제안한 식을 적용하여 정확도와 사용성을 검토하였다. 이 때 모델의 변위 함수의 차수와 요소 크기를 각기 다르게 하여 해석 목적에 알맞은 변위 함수의 차수와 모델 크기에 따른 최적의 요소 크기 비율을 제안하였다. 이에 본 연구의 결론은 다음과 같다.

우선 철근과 콘크리트의 응력을 이용한 휨 모멘트 계산식은 해석 과정에서 변위 함수에 의한 오차가 응력 값에 그대로 반영된다. 2차 변위 함수인 경우 거동 전체에 걸쳐 휨 모멘트 계산 오차가 적은데, 응력이 기본적으로 부재의 균열 및 파괴에 대한 상태를 포함하고 있기 때문에 탄성과 극한 직전의 소성 구간까지 제안한 식이 적용 가능하다. 그래서 부재의 거동을 대략적으로 살펴보는 목적이라면 해석 시간이 짧은 1차 변위 함수를 사용하고, 요소 크기가 전체 모델 높이의 25%여도 된다. 그러나 정밀하게 부재의 내력을 도출해야 할 경우에는 2차 변위 함수를 사용하고, 요소 크기를 최소 12.5%개로 설정해야 한다. 이 이상은 오차가 거의 차이 나지 않아서 많은 요소를 사용할 경우 오히려 해석 시간만 배가 된다.

최종적으로 응력을 이용한 철근 콘크리트의 휨 모멘트 계산

식은 3차원 연속체 요소의 비선형 해석까지 높은 정확도로 적용이 가능하다. 또한 이 제안식은 2차원 연속체의 해석 결과에도 동일하게 적용 가능하다. 매우 적은 오차를 가지면서도 해석 시간을 단축시킬 수 있는 최적의 요소 크기는 모델의 12.5%이다.

감사의 글

본 연구는 국토교통부가 주관하는 U-City 석·박사 과정 지원 사업의 지원을 받아 수행되었습니다.

References

- ABAQUS 6.14 Online Documentation (2014) Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA.
- ACI Committee 318 (2008) Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-08) and Commentary, *American Concr. Inst.*, p.465.
- Atkinson, K.E. (1989) An Introduction to Numerical Analysis 2d ed, *John Wiley & Sons*, p.218.
- Carpinteri, A. (2011) Failure Mode Transitions in Reinforced Concrete Beams - Part2: Experimental Tests, *ACI Struct. J.*, 108-S27, pp.286~293.
- CEB-FIP (2010) fib Model Code for Concrete Structures 2010 *Ernst & Sohn*, p.292.
- Chandrupatla, T.R., Belegundu, A.D. (2002) Introduction to Finite Elements in Engineering, *Prentice Hall*, Third ed, p.453.
- Chaudhari, S.V., Chakrabarti, M.A. (2012) Modeling of Concrete for Nonlinear Analysis Using Finite Element Code ABAQUS, *Int. J. Comput. Appl.*, 44, pp.15~18.
- Cook, R.D. (1995) Finite Element Modeling For Stress Analysis, *John Wiley & Sons, Inc.*, pp.330.
- Cook, R.D., Malkus, D.S. (1989) Concepts and Applications of Finite Element Analysis 3rd ed, *John Wiley & Sons, Inc.*, p.630.
- Durand, R., Farias, M.M. (2014) A Local Extrapolation Method for Finite Elements, *Adv. Eng. Softw.*, 67, pp.1~9.
- Gere, J.M. (2003) Mechanics of Materials 6th ed, *Thomson Brooks/Cole*, p.960.
- Gilbert, R.J., Warner, R.F. (1978) Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs, *American Soc. Civil Eng.*, 104, pp.1885~1900.
- Hu, H.-T. (2004) Nonlinear Finite Element Analysis

- of Reinforced Concrete Beams Strengthened by Fiber-reinforced Plastics, *Compos. Struct.*, 63, pp.271~281.
- Jain, S.C., Kennedy, J.B.** (1974) Yield Criterion for Reinforced Concrete Slabs, *American Soc. Civil Eng.*, 100, pp.631~644.
- Jie, Y.-X., Yuan, H.-N.** (2013) Bending Moment Calculations for Piles Based on the Finite Element Method, *J. Appl. Math.*, pp.1~19.
- KCI** (2012) Concrete Structure Code and Commentary, *Korea Concr. Inst.*, p.342.
- Logan, D.L.** (2012) A First Course in The Finite Element Method, *Cengage Learning*, p.925.
- Timoshenko, S., Goodier, J.N.** (1951) Theory of Elasticity 2nd ed., *Mcgraw-hill Book Company, Inc.*, p.506.
- Yu, J.** (2016) New Extended Finite Element Method for Pinching Effect in Reinforced Concrete Columns, *ACI Struct. J.*, No. 113-S59 pp.689~699.
- Hibbeler, R.C.** (2012) Structural Analysis 8 edition in SI Units, *Pearson*, p.695.

요 지

비선형 유한요소해석 결과를 이용하여 철근콘크리트 부재를 설계를 하고자 할 경우 위험단면에서의 휨모멘트를 산정하여야 한다. 본 논문에서는 연속체 요소를 사용한 철근콘크리트 유한요소해석 결과를 이용한 휨 모멘트 계산식을 제시하고 유한요소의 변위 함수의 차수에 따른 최적의 요소 크기를 제안하였다. 해석으로부터 산출된 응력을 적분하여 구한 휨 모멘트와 정역학적 평형 조건을 이용하여 계산한 휨 모멘트를 비교하였다. 응력을 적분하는 방법에서는 철근에 의한 응력과 콘크리트의 응력을 모두 고려하였다. 또한 유한요소해석으로 산출된 응력의 정확도에 영향을 주는 여러 요인들을 분석하고 적용요소의 변위 함수와 요소 크기를 다르게 설정하여 그 영향을 확인하였다. 해석의 목적이 부재의 거동을 대략적으로 살펴보는 목적이라면 1차 변위 함수를 사용하고 요소 크기가 해석 모델의 단면 높이의 25%정도라도 적절하다고 판단된다. 정확도가 높은 부재의 내력을 도출해야 할 경우에는 2차 변위 함수를 사용하고 요소 크기를 12.5%로 할 것을 제안한다.

핵심용어 : 철근콘크리트, 비선형 해석, 휨 모멘트, 절점 응력, 비선형, 요소 크기