다중 패치 쉘 아이소 지오메트릭 해석의 계면 연속성 검토

하 윤 도^{1*} · 노 정 민¹

¹군산대학교 조선해양공학과

Studies of Interface Continuity in Isogeometric Structural Analysis for Multi-patch Shell Components

Youn Doh Ha^{1*} and Jungmin Noh¹

¹Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Kunsan National University, Gunsan, 54150, Korea

Abstract

This paper presents the assembling of multiple patches based on the single patch isogeometric formulation for the shear deformable shell element given in the previous study. The geometrically exact shell formulation has been accomplished with the shell theory based formulation and the generalized curvilinear coordinate system directly derived from the given NURBS geometry. For the knot elements matching across adjacent surfaces, the zero-th and first parametric continuity conditions are considered and the corresponding coupling constraints are implemented by a master-slave formulation between adjacent patches. The constraints are then enforced by a substitution method for condensation of the slave variables, thereby reducing the model size. Through numerical investigations, the important features of the first parametric continuity condition are confirmed. The performance of the multi-patch shell models is also examined comparing the rate of convergence of response coefficients for the zero and first order continuity conditions and continuity in coupling boundary between two patches is confirmed.

Keywords : *isogeometric analysis, multi-patch formulation, parametric continuity conditions, NURBS, geometrically exact shell formulation*

1. 서 론

쉘(shell) 혹은 평판(plate)으로 모사되는 얇은 벽(thin-walled) 구조물은 자연 및 기술 분야에서 자주 사용된다. 특히 쉘은 곡면으로 이루어져 다양한 형태의 구조물을 비교적 자유롭게 표현할 수 있으며, 가능한 한 얇은 벽을 구성하여 자중을 줄이고 구조물의 재료를 최소화한다. 또한 쉘 구조는 규모에 대해서 독립적이며 그래핀(graphene)과 같이 작은 규모부터 자동차, 선박, 잠수함, 비행기와 같이 큰 규모까지 적용이 가능하다.

쉘 구조 해석에는 보편적으로 감절점 쉘 정식화(degenerated solid formulation)와 쉘 이론(shell theory)에 기반한 정식화가 사용된다. 두 방법은 쉘을 모사하기 위한 가정 및 기본

방정식들을 공유하지만 두께 방향 적분에 관련하여 서로 다른 접근법을 사용한다. Simo 등(1989)에 의해 제안된 쉘 이론 기반 정식화에서는 두께 방향 적분을 포함하여 모든 과정을 해석적으로 엄밀하게 유도하지만 구형, 원통형 등 정형화된 곡면 외에는 유한요소 이산화과정에서 충분히 모사되지 못하는 문제가 있었다. Ahmad 등(1970)에 의해 제안된 감절점 쉘 정식화에서는 수학적 엄밀함을 다소 양보하고 별도의 수치적인 기법들을 도입하여 비교적 간단하고 효율적으로 쉘 방정식을 유도하여 유한요소법을 통한 쉘 해석에 보편적으로 적용되어 왔다. 하지만 절점 값의 보간을 통해 쉘 요소를 표현하므로 오차가 발생하며 복잡한 쉘 모델의 경우 엄밀한 해석에 한계가 있다.

아이소 지오메트릭 해석법(isogeometric method)은 CAD

* Corresponding author:

Tel: +82-63-469-1856; E-mail: ydha@kunsan.ac.kr

Received January 3 2018; Revised February 7 2018;

Accepted February 8 2018

©2018 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

형상을 표현하는 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)를 통해 해석 공간의 기저함수를 구성한다(Hughes *et al.*, 2005). 따라서 별도의 유한요소 이산화 과정이 없이 CAD 모델을 그대로 해석 모델에 사용하기 때문에 접선, 법선 벡터 및 곡률 등의 기하학적 특성을 해석 공간에서 엄밀하게 표현할 수 있다. 쉘 해석 분야에서는 감절점 쉘 정식화(degenerated solid approach)을 통한 아이소 지오메트릭 쉘 해석 모델을 개발하는 연구가 수행되기도 하였다(Benson *et al.*, 2010; Bouclier *et al.*, 2013; Hosseini *et al.*, 2014). 또한 NURBS 곡면으로부터 곡면 좌표계(curvilinear coordinate system)를 직접 구성하고 이를 쉘 이론 기반 정식화에 적용하여 기하학적으로 엄밀한 쉘 해석 모델을 구성하는 연구도 수행되었다(Kiendl *et al.*, 2009; Echter *et al.*, 2013; Ha, 2015). 이는 NURBS 곡면 정보를 해석 공간에 그대로 활용할 수 있는 아이소 지오메트릭 해석법의 장점을 살리는 접근법으로서 Ha(2015)는 직교 좌표계에서 유도되던 형상 설계 민감도를 일반 곡면 좌표계에서 다시 정식화하고 쉘 이론 기반 정식화에 적용하였다. 이를 통해 곡면 구조의 형상 설계민감도에 필요한 고차 기하학적 정보인 법선 및 곡률 등이 엄밀하게 고려되어 더욱 정확한 설계민감도 결과 및 최적설계 형상을 얻을 수 있음을 확인하였다.

정밀한 곡면 구조를 표현하고 국부적으로 해석 모델을 세분화하는 등 다양한 목적에 의해 다중 패치가 결합된 CAD 구조가 사용된다. 이 때 두 패치 계면(interface)에서 곡면 매개 구조가 동일하지 않으면 해의 연속성이 보장되지 않는 문제가 생긴다. 이를 고려한 다중 패치 NURBS 구조의 아이소 지오메트릭 해석에 대한 다양한 연구가 이루어져 왔다(Cottrell *et al.*, 2007; Kiendl *et al.*, 2010; Lei *et al.*, 2015; Ha, 2015). 본 연구에서는 Ha(2015)에서 소개된 단일 패치에 대한 아이소 지오메트릭 해석을 기반으로 인접한 패치 간 계면에서 매개변수 0차 연속성(C^0)과 1차 연속성(C^1) 조건을 고려하여 다중 패치 쉘 아이소 지오메트릭 해석으로 확장한다. 또한 다양한 수치 예제를 통해 인접 곡면 간 연속성 조건이 해석 결과에 미치는 영향에 대해 조사한다.

2. 다중 패치 곡면의 아이소 지오메트릭 정식화

본 연구에서는 단일 패치 곡면 구조를 다중 패치가 결합된 곡면 구조로 확장하기 위해서 매개변수 연속성을 고려한다. 또한 다중 패치 쉘의 아이소 지오메트릭 구조해석 모델 정식화를 수행한다.

2.1 다중 패치 NURBS 곡면 구조

매개변수 곡면(parametric surface) $\Omega^{(i)}$ 는 기하학적 사상(geometry mapping) $\mathbf{G}^{(i)}$ 를 통해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{G}^{(i)} : [0,1] \times [0,1] = \hat{\Omega}^{(i)} \rightarrow \Omega^{(i)} \quad (1)$$

NURBS 매개화를 적용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{G}^{(i)}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,p}(\theta^1) N_{j,q}(\theta^2) \mathbf{P}_{i,j} \quad (2)$$

여기서, $\mathbf{P}_{i,j}$ 는 조정점(control point)이며, $M_{i,p}(\theta^1)$ 과 $N_{j,q}(\theta^2)$ 는 $[0,1]$ 의 파라메트릭 노트 θ^1, θ^2 에서 각각 정의되는 p 차와 q 차 NURBS 기저함수이다. p 차 NURBS 기저함수는 다음과 같이 정의된다.

$$M_{i,p}(\theta^1) = \frac{\phi_{i,p}(\theta^1) \omega_i}{\sum_{j=1}^m \phi_{j,p}(\theta^1) \omega_j} \quad (3)$$

여기서, ω_i 는 가중치(weight)이며 B-spline 함수 $\phi_{i,p}(\theta)$ 는 다음과 같다.

$$\phi_{i,p}(\theta) = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+p} - \theta_i} \phi_{i,p-1}(\theta) + \frac{\theta_{i+p+1} - \theta}{\theta_{i+p+1} - \theta_{i+1}} \phi_{i+1,p-1}(\theta) \quad (p=1,2,3,\dots) \quad (4)$$

$$\phi_{i,0}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{if } \theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (p=0) \quad (5)$$

$N_{j,q}(\theta^2)$ 도 유사하게 정의되며, 두 기저함수로 매개화되는 NURBS 곡선의 텐서 곱으로 NURBS 곡면이 표현된다. 일반적으로 NURBS 곡선은 양 끝단의 노트 0과 1을 기저함수의 차수만큼 추가로 중첩시켜서 조정점을 끝단에 위치시키는 끝단부 조건(end condition)을 고려한다. 예를 들어 끝단부 조건이 적용된 노트 θ^1 은 다음과 같다.

$$\theta^1 = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \theta_{p+1}^1, \dots, \theta_{m-p-1}^1, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \quad (6)$$

여기서, m 은 θ^1 에 대한 기저 함수의 수가 된다.

Fig. 1은 인접한 두 곡면 패치로 구성되는 곡면 $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ 를 표현한다. 각 곡면 패치 $\Omega^{(1)}$ 과 $\Omega^{(2)}$ 는 독립적으로 식 (2)에 의해 NURBS 곡면으로 매개화되며, 두 패치 사이에 결합

Fig. 1 Multi-patch surface parameterization

경계(coupling boundary) Γ^c 및 결합 영역(coupling domain) Ω^c 가 정의된다. 결합 영역 Ω^c 에 포함되는 조정점들의 집합은 $\mathbf{P}_c^{i,d}$ 으로 표기한다. 여기서 상 첨자 i 와 d 는 각각 패치 번호와 매개변수 연속성 차수(C^d)를 나타내며, 하 첨자 c 는 결합 영역 Ω^c 내의 조정점을 의미한다. Ω^c 외부의 조정점들의 집합은 비결합 영역(non-coupling domain)을 의미하는 하 첨자 n 을 사용하여 $\mathbf{P}_n^i$ 으로 표기한다. 특별히 결합 경계 Γ^c 를 따라 존재하는 조정점들은 0차 매개변수 연속성(C^0)을 표현하는데 사용되기 때문에 $\mathbf{P}_c^{i,0}$ 로 표기된다. 두 패치 간 접선이 일치하는 1차 연속성(C^1) 및 고차 연속성을 고려하기 위해서는 Ω^c 내의 조정점들이 추가로 고려된다.

2.2 곡면 연속성

본 연구에서는 결합 경계에서 패치 간 NURBS 곡면 조정점과 파라메트릭 노트가 일치하는 구조(conforming patch)에 대해 조사한다. 본 연구에서 다루지는 않지만, 패치 간 곡면 조정점과 파라메트릭 노트가 일치하지 않는 구조(non-conforming patch)에서는 노트를 삽입하는 h-세분화를 통해 결합 영역에서 노트 구조를 일치시키거나(Cottrell *et al.*, 2007), Nitsche 방법(Nguyen *et al.*, 2015) 등 다양한 방법을 통해 곡면 연속성을 고려한다.

결합 경계에서 패치 간 조정점과 노트가 일치하는 구조(conforming patch)에서 0차 매개변수 연속성(C^0)은 두 패치 사이의 결합 경계를 통해 자연스럽게 만족된다. 이 때 두 패치는 동일한 기하학적 사상을 통해 결합 경계를 다음과 같이 표현하게 된다.

$$\Gamma^c = \{ \mathbf{G}^{(1)}(1, \theta^2) = \mathbf{G}^{(2)}(0, \theta^2), \theta^2 \in [0, 1] \} \quad (7)$$

위 식은 두 곡면이 각각 노트 θ^1 가 고정된 경계에서 결합하는

경우로, 결합 경계 정의는 패치 결합 방향에 따라 적절히 보정된다. $\mathbf{G}^{(1)}(1, \theta^2)$ 과 $\mathbf{G}^{(2)}(0, \theta^2)$ 는 각 곡면 패치의 결합 경계를 이루는 곡선으로 θ^2 에 대해서 동일한 기하학적 사상이 사용되며 끝단부 조건에 의해 다음과 같다.

$$\mathbf{G}^{(1)}(1, \theta^2) = \sum_{j=1}^n N_{j,q}(\theta^2) (\mathbf{P}_c^{1,0})_j \quad (8)$$

$$\mathbf{G}^{(2)}(0, \theta^2) = \sum_{j=1}^n N_{j,q}(\theta^2) (\mathbf{P}_c^{2,0})_j$$

따라서 다음과 같은 0차 연속성 조건이 구성된다.

$$\mathbf{P}_c^{1,0} = \mathbf{P}_c^{2,0} \quad (9)$$

각 곡면 패치에 대한 식 (2)를 매개변수 θ^1 에 대해 미분하고 끝단부 조건을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{G}^{(1)}}{\partial \theta^1}(1, \theta^2) = \frac{p}{1 - \theta_{m-p-1}^1} \sum_{j=1}^n N_{j,q}(\theta^2) (\mathbf{P}_c^{1,0} - \mathbf{P}_c^{1,1})_j \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}^{(2)}}{\partial \theta^1}(0, \theta^2) = \frac{p}{\tilde{\theta}_{p+1}^1} \sum_{j=1}^n N_{j,q}(\theta^2) (\mathbf{P}_c^{2,1} - \mathbf{P}_c^{2,0})_j$$

따라서 결합 경계에서 두 패치의 θ^1 방향 접선 벡터가 연속하는 조건은 다음과 같이 얻어진다.

$$(\mathbf{P}_c^{2,1} - \mathbf{P}_c^{2,0}) = t(\mathbf{P}_c^{1,0} - \mathbf{P}_c^{1,1}), \quad t = \frac{\tilde{\theta}_{p+1}^1}{1 - \theta_{m-p-1}^1} \quad (11)$$

식 (9)와 (11)을 통해 1차 매개변수 연속성 조건 C^1 이 구성된다. 이 때 θ^1 방향의 매개화는 일반적으로 두 패치에서 동일하지 않다. 본 연구에서는 1차 연속성까지 고려하지만, 고차 연속성을 위해서는 결합 영역에 속하는 조정점과 추가의 연속성 조건이 고려된다.

2.3 다중 패치 아이소 지오메트릭 쉘 정식화

다중 패치 아이소 지오메트릭 쉘 정식화를 위해서 마스터-슬레이브 관계(Cottrell *et al.*, 2007)를 도입한다. $\Omega^{(1)}$ 을 마스터 패치, $\Omega^{(2)}$ 를 슬레이브 패치로 하는 두 패치 결합에 대해 곡면 연속성 조건식 (9, 11)을 고려한 조정점 변환 관계식을 다음과 같이 구성한다.

$$\begin{pmatrix} P_n^1 \\ P_n^2 \\ P_c^{1,0} \\ P_c^{1,1} \\ P_c^{2,0} \\ P_c^{2,1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & (t+1)I & -tI \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_n^1 \\ P_n^2 \\ P_c^{1,0} \\ P_c^{1,1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

변환행렬(transformation matrix)을 구성하는 단위행렬 I 는 조정점 벡터들의 크기를 고려하여 구성된다. 등매개변환(isoparametric mapping)을 통해 아이소 지오메트릭 응답 벡터는 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \\ Y_c^{1,0} \\ Y_c^{1,1} \\ Y_c^{2,0} \\ Y_c^{2,1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & (t+1)I & -tI \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \\ Y_c^{1,0} \\ Y_c^{1,1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

여기서, 변환행렬을 구성하는 단위행렬 I 의 크기는 일반적으로 식 (12)와 동일하지 않으며 각 조정점에 위치한 응답 벡터의 자유도를 고려하여 구성된다. 기하학적으로 엄밀한 아이소 지오메트릭 쉘 모델(Ha, 2015)을 개별 곡면 패치 모델로 적용하는 경우에, 각 조정점은 3차원 좌표를 표현하고 응답 벡터는 각각 5개의 자유도를 표현하며 식 (12), (13)도 이에 따라 구성된다. 본 논문에서는 다중 패치 아이소 지오메트릭 쉘 정식화 과정을 간결하게 설명하기 위해 두 패치가 결합되는 과정을 행렬-벡터 표현을 사용하여 기술한다. 단일 곡면에 대한 연속체 기반의 상세한 수식은 Ha(2015)를 참고하기 바란다. $\Omega^{(1)}$ 과 $\Omega^{(2)}$ 에 대한 아이소 지오메트릭 쉘 구조방정식을 행렬-벡터 형식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{nn}^i & K_{nc}^{i,0} & K_{nc}^{i,1} \\ K_{cn}^{i,0} & K_{cc}^{i,0} & K_{cc}^{i,(1,0)} \\ K_{cn}^{i,1} & K_{cc}^{i,(0,1)} & K_{cc}^{i,1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_n^i \\ Y_c^{i,0} \\ Y_c^{i,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n^i \\ b_c^{i,0} \\ b_c^{i,1} \end{pmatrix}, \quad (i = 1 \text{ or } 2) \quad (14)$$

여기서, 시스템 행렬 K 는 Ha(2015)의 식 (59)~(62)에 의해 쉘의 막(membrane), 굽힘(bending), 전단(transverse shear) 특성을 포괄하며, 응답 벡터 Y 와 같이 결합(coupling)과 비결합(non-coupling) 자유도에 따라 분배하였다. 하중 벡터 b 는 Ha(2015)의 식 (63)을 통해 구성되며 식 (13)과 동일한 배치 및 변환 관계를 가진다. 두 곡면 패치 방정식을 단순 결합하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{nn}^1 & 0 & K_{nc}^{1,0} & K_{nc}^{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{nn}^2 & 0 & 0 & K_{nc}^{2,0} & K_{nc}^{2,1} \\ K_{cn}^{1,0} & 0 & K_{cc}^{1,0} & K_{cc}^{1,(1,0)} & 0 & 0 \\ K_{cn}^{1,1} & 0 & K_{cc}^{1,(0,1)} & K_{cc}^{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{cn}^{2,0} & 0 & 0 & K_{cc}^{2,0} & K_{cc}^{2,(1,0)} \\ 0 & K_{cn}^{2,1} & 0 & 0 & K_{cc}^{2,(0,1)} & K_{cc}^{2,1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \\ Y_c^{1,0} \\ Y_c^{1,1} \\ Y_c^{2,0} \\ Y_c^{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n^1 \\ b_n^2 \\ b_c^{1,0} \\ b_c^{1,1} \\ b_c^{2,0} \\ b_c^{2,1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

식 (13)을 통해 식 (15)의 슬레이브 패치 결합 영역 변수인 $Y_c^{2,0}, Y_c^{2,1}$ 가 정적 압축(static condensation)되도록 정리하면 곡면 연속성을 고려하여 결합된 두 곡면 패치에 대한 아이소 지오메트릭 쉘 구조방정식을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{nn}^1 & 0 & K_{nc}^{1,0} \\ 0 & K_{nn}^2 & K_{nc}^{2,0} + K_{nc}^{2,1}(t+1) \\ K_{cn}^{1,0} & K_{cn}^{2,0} + (t+1)K_{cn}^{1,1} & K_{cc}^{1,0} + \tilde{K}_{cc}^{1,0} \dots \\ K_{cn}^{1,1} & -tK_{cn}^{2,1} & K_{cc}^{1,(0,1)} + \tilde{K}_{cc}^{1,(0,1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \\ Y_c^{1,0} \\ Y_c^{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n^1 \\ b_n^2 \\ b_c^{1,0} + b_c^{2,0} + (t+1)b_c^{2,1} \\ b_c^{1,1} - tb_c^{2,1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\tilde{K}_{cc}^{1,0} = (K_{cc}^{2,0} + (t+1)K_{cc}^{2,(0,1)} + K_{cc}^{2,(1,0)} + t(t+1)K_{cc}^{2,1}), \quad (17)$$

$$\tilde{K}_{cc}^{1,(0,1)} = -t(K_{cc}^{2,(0,1)} + (t+1)K_{cc}^{2,1}),$$

$$\tilde{K}_{cc}^{1,(1,0)} = -t(K_{cc}^{2,(1,0)} + (t+1)K_{cc}^{2,1})$$

쉘 구조방정식 (16)을 통해 응답 계수들을 구한 후 마스터-슬레이브 관계식 (13)에 의해 정적 압축되었던 변수 $Y_c^{2,0}, Y_c^{2,1}$ 를 복구한다.

3. 수치 예제

3.1 다중 패치 평면 쉘 모델

Fig. 2와 같이 $1m \times 1m$ 의 정사각형 평면 패치 $\Omega^{(1)}$ 과 $\Omega^{(2)}$ 가 결합되고 두께(h)가 0.2m이며 2차 NURBS 기저함수로 구성된 평면 쉘 모델을 고려한다. $\Omega^{(1)}$ 은 핀 지지로 고정시키고 $\Omega^{(2)}$ 우측 끝단 경계를 따라 법선(z) 방향으로 1,000N의 힘을 준다. 탄성계수(E)가 10MPa이고 포아송비(ν)가 0.3인 탄성재료에 대한 구조 응답을 검토하였다. 결합 경계에 매개변수 연속성 C^0 와 C^1 을 각각 고려할 때 다중 패치 쉘의 구조 응답을 조사하기 위해, Fig. 2(a)와 같이 $\Omega^{(1)}$ 를 구성하는 매개변수 $\hat{\Omega}$ 은 고정하고 $\Omega^{(2)}$ 를 구성하는 $\hat{\Omega}$ 의 θ^1 방향을 3단계로 h-세분화

Fig. 2 Multi-patch flat shell model

하여 매개화한다. Fig. 2(b)의 “Type 1:1” 모델에서 $\Omega^{(1)}$ 과 $\Omega^{(2)}$ 는 각각 1개의 노트 요소와 9개(3×3)의 조정점으로 매개화된다. “Type 1:4”과 “Type 1:8” 모델에서 $\Omega^{(1)}$ 과 $\Omega^{(2)}$ 의 θ^2 매개화는 모두 동일하지만 θ^1 은 각각 4개 노트 요소와 18개 (6×3)의 조정점, 8개 노트 요소와 30개(10×3)의 조정점을 가지도록 h-세분화된다. “Type 1:1” 모델에 C^0 와 C^1 을 각각 적용한 변형 형상과 조정점 구조를 Fig. 3에서 비교한다. C^1 조건이 결합 경계에 인접한 $\Omega^{(2)}$ 영역의 조정점들까지 영향을 주어 변형이 구속되는 것을 확인할 수 있다.

다음으로 Fig. 2(b)와 같이 “Type 1:4” 모델에 연속성 조건을 적용한 해석 결과를 Fig. 4에 나타내었다. “Type 1:4” 모델의 $\Omega^{(1)}$ 은 “Type 1:1” 모델과 동일하게 매개화되고 경계 조건이 부과된다. 그러나 $\Omega^{(2)}$ 는 h-세분화되어 18개(6×3) 조정점으로 매개화된다. 이 때 θ^2 는 세분화하지 않았기 때문에 하중 경계 조건에 변화는 없다. Fig. 3(b)과 마찬가지로 Fig. 4(b)에서 결합 영역 Ω^c 의 조정점들은 C^1 조건에 의해 x - y 평면에 접하지만, 노트 분할에 의해 Ω^c 의 크기가 감소하여 변형이 구속되는 정도가 크게 감소하는 것을 확인할 수 있다. “Type 1:4” 모델은 두 연속성 조건에 대해 유사한 변형을 보이지만, Fig. 4(a)와 같이 C^0 조건 모델은 결합 경계 인근

Fig. 3 Deformations and control nets for Type 1:1

Fig. 4 Deformations and control nets for Type 1:4

Fig. 5 Control nets for 1:8 patch structures

Fig. 6 Convergence of deflections for different continuity conditions and patch structures

에서 국부적으로 아래로 치지는 변형이 나타나는 것을 확인할 수 있다. C^0 조건은 결합 영역에서 곡면의 접선이 연속하지 않기 때문에 이와 같은 비합리적인 변형을 보인다. Fig. 5에서는 "Type 1:8" 모델 해석 결과를 비교하였다. "Type 1:8" 모델은

$\Omega^{(2)}$ 를 한 단계 더 세분화하여 30개(10×3)의 조정점으로 매개화된다. C^1 조건은 더욱 정밀한 결과를 주고 있으나, C^0 조건에서 Fig. 5(a)와 같이 결합 경계 인근에서 국부적으로 아래로 치지는 비합리적인 변형이 더욱 두드러지게 나타난다.

Fig. 6에서는 "Type 1:1, 1:4, 1:8" 모델들을 h-세분화하고 C^0 과 C^1 조건을 각각 적용하여 수치해의 수렴성을 검토하였다. h-세분화는 $\Omega^{(1)}$ 과 $\Omega^{(2)}$ 의 각 방향(θ^1, θ^2)에 대해 동일한 수준으로 적용하였으며, 전체 모델의 조정점의 수를 x -축에 표기하였다. 세분화 정도에 따른 하중 경계 중앙 조정점에서 발생하는 양의 법선 방향(z) 최대 처짐량(deflection)을 y -축에 나타내었다. C^0 모델은 결합 경계의 조정점 위치만 공유하기 때문에 결합 영역 Ω^c 내의 노트 구조가 세분화되어도 해의 수렴성에 많은 변화가 없다. 그러나 C^1 모델은 Ω^c 노트 구조가 세분화될수록 해의 수렴성이 크게 개선되는 것을 확인할 수 있다. 특히 C^1 을 적용한 "Type 1:8" 모델은 가장 성긴(coarse) 노트 구조에서 거의 수렴한 결과를 보이며 수렴 속도가 매우 빠르다. C^1 을 적용한 "Type 1:1" 모델은 h-세분화될수록 변형이 수렴하는 것이 확인되지만 일정 부분 변형이 구속되는 경향을 보인다.

3.2 자동차 전면 범퍼 모델

Fig. 7과 같이 자동차 전면 범퍼를 곡면 쉘로 모델링하였다. 범퍼 길이는 약 0.9m, 높이는 0.4m, 두께는 0.0035m이며 곡면은 2차 NURBS 기저함수에 의해 구성된다. 본 예제에서는 탄성 계수(E)가 20.4GPa이고 포아송비(ν)가 0.27인 탄성 재료를 고려한다. 좌우 대칭인 범퍼 형상을 활용하여 1/2 모델을 고려하고 대칭면에 y - z 평면 대칭 조건을 부과하였다. 또한 범퍼는 볼트 및 너트에 의해 차체에 고정되므로 대칭 경계 외의 경계는 고정하였다. 범퍼 상하면의 굴곡 변화를 고려하여 $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$ 로 분할하고 C^1 연속성을 고려하였다. 계면 연속성과 관련

Fig. 7 Automobile front bumper model

Fig. 8 Deformations of automobile bumper model

하여 결합 경계 주변의 변형을 검토하기 위해 결합 경계를 따라 면의 법선 방향으로 하중 100N을 가하였다. $\Omega^{(1)}$ 과 $\Omega^{(2)}$ 는 각각 θ^1 노트 35개, θ^2 노트 81개의 동일한 노트 구조를 가지도록 매개화하였다. 이 때 θ^1 은 결합 경계를 따라 길이 방향을 매개화하며, θ^2 은 범퍼의 높이 방향을 매개화한다. 이를 통해 각 곡면 패치에서 조정점 메쉬 구조는 서로 다르지만 각각 범퍼의 길이 방향으로 37개, 높이 방향으로 83개의 동일한 수의 조정점으로 모델링된다. 범퍼 해석 모델은 높이 방향으로 C^1 연속성의 영향을 많이 받도록 모델링되어 있으므로, 길이 방향에 비해 높이 방향으로 더욱 세분화하여 전체 6,142개의 조정점으로 매개화하였다. 다중 패치 쉘 아이소 지오메트릭 정적 구조 해석을 통한 자동차 전면 범퍼 모델의 변형 형상은 Fig. 8과 같고 하중 경계에서 최대 처짐량 0.029763m이 발생한다.

처짐량(deflection)을 등고선 형태(contour)로 표기한 Fig. 9를 통해 변형 형상을 통해 변형 전 결합 경계를 통해 연속되었던 두 곡면이 변형 후에도 부드럽게 연결되는 것을 확인할 수 있다. 이를 보다 엄밀하게 확인하기 위해 결합 경계 위의 임의의 조정점(Fig. 9)에서 변형을 구성하는 응답 벡터 자유도 값을

Fig. 9 Contour for automobile bumper model (deflection)

Table 1 Response coefficients at an arbitrary point on the shared edge

		$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$
In-surface displacements	θ^1	2.17959E-03	2.17959E-03
	θ^2	-3.97861E-02	-3.97861E-02
Deflection	θ^3	5.67048E-01	5.67048E-01
Rotational angles	θ^1	-4.80859E-01	-4.80859E-01
	θ^2	-6.26507E+00	-6.26507E+00

Table 1에서 비교하였고, 결합 경계의 임의의 점에서 두 곡면 패치의 변형이 일치하는 것을 확인하였다.

4. 결 론

본 연구에서는 단일 패치에 대해 정식화된 기하학적으로 엄밀한 쉘의 아이소 지오메트릭 해석 모델을 인접 곡면 간 연속성 조건을 도입하여 다중 패치 해석 모델로 확장하였다. 결합 경계에서 패치 간 NURBS 곡면 조정점과 파라메트릭 노트가 일치하는 구조에 대해 조사하였으며 결합 경계에서 두 패치의 끝단 부가 일치하는 0차 매개변수 연속성(C^0)과 결합 경계에서 두 패치의 방향 접선 벡터가 연속하는 1차 매개변수 연속성(C^1)을 고려하였다. 두 패치에서 마스터 패치, 슬레이브 패치를 정하여 두 패치의 결합에 대해 매개변수 연속성 조건을 고려한 조정점 변환 관계식을 구성하고 연속성을 고려하여 결합된 두 곡면 패치에 대한 아이소 지오메트릭 쉘 구조방정식을 구성하였다. 다중 패치 쉘 모델들에 대해 기하학적으로 엄밀한 쉘 구조해석을 수행하여 연속성 조건이 구조 응답에 미치는 영향 및 수렴 특성을 검토하였다. 다중패치 평면 쉘 모델에서는 C^0 조건과 C^1 의 차이점을 확인하였다. 결합 영역이 상대적으로 넓은 경우에는 C^1 조건이 거동을 일부 제약하는 경향이 있지만, 패치를 세분화하여 결합영역이 감소할수록 C^1 조건에서 해의 수렴성이 크게 개선되는 것을 확인하였다. 반면 C^0 조건을 고려한 모델은 결합경계의 조정점 위치만 공유하기 때문에 결합 영역에서 물리적으로 불합리한 거동이 나타날 수 있음을 확인되었다. 실제적인 구조 모델로서 자동차 전면 범퍼를 2개의 다중 패치 곡면 쉘로 모델링하고 C^1 조건을 고려하여 제안된 해석 모델을 적용하였다. 두 패치가 물리적으로 연결되는지 확인하기 위해 결합 경계에 법선 방향 하중을 가하여 변형의 연속성을 확인하였다. 또한 결합 경계 상의 임의의 점에서 두 패치의 변위 값을 비교하여 패치 연결성이 유지됨을 수치적으로 확인하였다.

감사의 글

본 연구는 2015년도 정부(교육부) 재원으로 한국 연구재단이 주관하는 기본연구지원사업(No.2015R1D1A1A0 1058649)과 한국에너지기술평가원(KETEP)이 주관하는 네트워크 기반 유체기기 고효율화 고급트랙 인력양성 사업(No.20174010 201350)의 지원을 받아 수행되었습니다.

References

Ahmad, S., Orons, B.M., Zienkiewicz, O.C. (1970)

- Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2, pp. 419~451.
- Benson, D.J., Bazileves, Y., Hsu, M.C., Hughes, T.J.R.** (2010) Isogeometric Shell Analysis: The Reissner-Mindlin Shell, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 199(5~8), pp.276~289.
- Bouclier, R., Elguedj, T., Combescure, A.** (2013) Efficient Isogeometric NURBS-based Solid-Shell Element: Mixed Formulation and B-method, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 267, pp.86~110.
- Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Reali, A.** (2007) Studies of Refinement and Continuity in Isogeometric Structural Analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 196(41~44), pp.4160~4183.
- Echter, R., Oesterle, B., Bischoff, M.** (2013) A Hierarchic Family of Isogeometric Shell Finite Elements, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 254, pp.170~180.
- Hosseini, S., Remmers, J.J.C., Verhoosel, C. V., Borst, R.** (2014) An Isogeometric Continuum Shell Element For Non-linear Analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 271, pp.1~22.
- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazileves, Y.** (2005) Isogeometric Analysis: CAD, Finite Element, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 194(39~41), pp.4135~4195.
- Ha, Y.D.** (2015) Generalized Isogeometric Shape Sensitivity Analysis in Curvilinear Coordinate System and Shape Optimization of Shell Structures, *Struct. & Multidiscip. Optim.*, 52(6), pp.1069~1088.
- Kiendl, J., Bletzinger, K.-U., Linhard, J., Wuchner, R.** (2009) Isogeometric Shell Analysis with Kirchhoff-Love Elements, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 198(49~52), pp.3902~3914.
- Lei, Z., Gillot, F., Jezequel, L.** (2015) A C^0/C^1 Multiple Patches Connection Method in Isogeometric Analysis, *Appl. Math. Model.*, 39(15), pp.4405~4420.
- Nguyen, V., Kerfridenu, P., Brino, M., Bordas, S., Bonisoli, E.** (2015) Nitsche's Method for Two and Three Dimensional NURBS Patch Coupling, *Comput. Mech.*, 53(6), pp.1163~1182.
- Simo, J.C., Fox, D.D.** (1989) On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 72(3), pp.267~304.

요 지

본 연구에서는 NURBS 기반 아이소 지오메트릭 쉘 해석을 위해 다중 패치 해석 모델을 정식화하였다. 기존 연구를 통해 개발된 단일 패치로 구성된 전단 변형을 고려한 쉘 요소에 대해 일반 좌표계에서 기하학적으로 엄밀한 쉘 구조물의 아이소 지오메트릭 해석 모델을 도입하고 매개변수 연속성을 고려하여 다중 패치 모델로 확장하였다. 인접 곡면의 노드 요소가 결합 경계를 통해 조화를 이루는 경우에 대해 0차와 1차 매개변수 연속성 조건을 고려하였으며, 두 패치 간 마스터-슬레이브 관계를 정립하여 중속된 한 곡면의 자유도를 상대 곡면의 자유도로 표시하여 모델 크기를 줄이면서 두 곡면을 결합하였다. 다중 패치 쉘 예제에 대해 0차와 1차 연속성 조건을 각각 적용하여 구조해석을 수행하여 1차 연속성 조건의 주요한 특성들을 확인하였다. 또한 각 연속성 조건에 대한 해의 수렴 특성을 검토하였으며 결합 경계에서의 두 패치의 연속성을 확인하였다.

핵심용어 : 아이소 지오메트릭 해석, 다중 패치 정식화, 매개변수 연속성 조건, NURBS, 기하학적으로 엄밀한 쉘 정식화