효율적이고 신뢰성있는 자연요소 균열해석을 위한 균열선단 그리드 세분화기법

조진래^{1*}

¹홍익대학교 조선해양공학과

A Near-tip Grid Refinement for the Effective and Reliable Crack Analysis by Natural Element Method

Jin-Rae Cho^{1*}

¹Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Hongik University, Sejong, 30016, Korea

Abstract

This paper introduces a near-tip grid refinement and explores its usefulness in the crack analysis by the natural element method(NEM). As a sort of local h-refinement in finite element method(FEM), a NEM grid is locally refined around the crack tip showing high stress singularity. This local grid refinement is completed in two steps in which grid points are added and Delaunay triangles sharing the crack tip node are divided. A plane strain rectangular plate with symmetric edge cracks is simulated to validate the proposed local grid refinement and to examine its usefulness in the crack analysis. The crack analysis is also simulated using a uniform NEM grid for comparison. Unlike the uniform grid, the refined grid provides near-tip stress distributions similar to the analytic solutions and the fine grid. In addition, the refined grid shows higher convergence than the uniform grid, the global relative error to the total number of grid points.

Keywords : natural element method, near-tip grid refinement, crack analysis, near-tip stress distribution, convergence rate

1. 서론

1990년대 중반에 소개된 전통적인 무요소기법들(Belytschko *et al.*, 1994; Liu *et al.*, 1995; Duarte and Oden, 1996)은 유한요소법(FEM: finite element method)이 안고 있는 요소망 생성과 세분화의 번거로움 그리고 요소 찢어짐에 따른 문제점을 해결하기 위해 탄생하였다. 하지만, 이러한 무요소기법들은 그리드 절점에서 크로네커 델타(kronecker delta) 성질을 만족하지 않아 변위 경계조건 처리를 위해 추가적인 기법이 필요하다(Zu and Atluri, 1998). 또한, 보간함수(interpolation function)들의 지지영역(support)들이 복잡하게 겹쳐져 있어 가우스 구적법(gauss quadrature rule)을 이용한 수치적분을 위해 별도의 배경 셀(background cell)이

요구된다(Dolbow and Belytschko, 1999).

이러한 그리드 절점 기반의 무요소기법이 안고 있는 경계 조건 처리와 수치적분 상의 문제는 자연요소법(NEM: natural element method) (Braun and Sambridge, 1995; Sukumar *et al.*, 1998)으로 해결이 가능하다. 자연요소법에서는 보간함수들이 그리드 절점이 아닌 보로노이(voronoi) 다이어그램과 델라우니(delaunay) 삼각화를 기반으로 정의되기 때문에 크로네커 델타 성질을 만족한다. 또한 보간함수 정의를 위해 생성된 델라우니 삼각형들이 가우스 구적분에 의한 수치적분을 위한 배경 셀 역할을 하기 때문이다(Sukumar *et al.*, 1998; Lee and Cho, 2008).

라플라스(laplace) 보간함수라 불리는 자연요소법에서의 보간함수는 크로네커 델타 성질 이외에 C^1 -연속성 수준의

* Corresponding author:

Tel: +82-44-860-2546; E-mail: jrcho@hongik.ac.kr

Received March 17 2019; Revised May 7 2019;

Accepted May 29 2019

©2019 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

높은 함수 유연성(smoothness)을 지니고 있다(Sukumar and Moran, 1999). 이러한 보간함수의 우수한 특성으로 자연 요소법은 높은 해석결과와 정확도를 제공함은 물론 박판의 잠금 현상(locking phenomenon)의 해결에도 적용되고 있다(Cho *et al.*, 2013). 또한, 구조역학 문제는 물론 많은 공학분야 문제의 수치해석을 위한 기법으로 확대되고 있다(Chinesta *et al.*, 2011).

본 연구는 자연요소법의 균열해석 적용에 관한 것으로서 균열선단 주위의 자연요소 그리드 세분화(NEM grid refinement)기법을 내용으로 한다. 소개하고자 하는 그리드 세분화는 유한요소법에서 요소망 국부 h -세분화가 해석결과와 정확도를 효과적으로 향상시킨다는 사실(Szabo and Babuska, 1991)에 착안한 것이다. 본 연구의 주된 목적은 자연요소법에 의한 균열해석에서 균열선단 그리드 세분화가 해석결과 향상에 얼마나 효과적인지 탐구하는 것이다. 이를 위해 균열선단 주위의 응력분포를 이론해 그리고 균일 자연요소 그리드의 해석결과와 비교하였다. 또한, 해석결과와 향상 정도를 전역 상대오차(global relative error)의 수렴률(convergence ratio)을 이용하여 고찰하였다.

2. 2-D 선형 탄성문제에 대한 자연요소 근사화

Fig. 1은 엣지 균열(edge crack)을 가진 기하학적 영역이 $\Omega \in R^2$ 이고, 경계가 $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_c$ 인 2차원 선형 탄성체를 나타내고 있다. 여기서, $\Gamma_c = \overline{\Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-}$ 는 균열의 윗면 Γ_c^+ 과 아랫면 Γ_c^- 으로 구성되어 있다. 균열의 윗면과 아랫면에는 표면력이 작용하지 않는다고 가정하면 물체의 변위장 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 는 다음의 정적 평형(static equilibrium)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

과 변위 경계영역 Γ_D 상에 부과된 변위조건

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_D \quad (2)$$

Fig. 1 A 2-D linear elastic body with an edge crack

그리고 하중 경계영역 Γ_N 상의 외부 하중조건

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \hat{\mathbf{t}} & \text{on } \Gamma_N \\ 0 & \text{on } \Gamma_c^\pm \end{cases} \quad (3)$$

에 의해 지배된다. 여기서, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 코오시(cauchy) 응력을 나타내고 $\mathbf{n}$ 은 경계 $\partial\Omega$ 에 바깥으로 수직한 단위벡터를 나타내며 $\hat{\mathbf{t}}$ 은 표면력을 의미한다.

미소변위와 미소 변형률을 가정하면, 코오시 변형률 $\boldsymbol{\epsilon}$ 은 (3×2) 의 그라디언트(gradient)와 같은 연산자 $\mathbf{L}$ 에 의해

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (4)$$

과 같이 정의된다. 그리고 $\mathbf{D}$ 를 영률과 푸와송비로 표현되는 (3×3) 재료물성치 행렬이라고 하면, 응력과 변형률은 다음과 같이 구성된다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5)$$

식 (1)~(3)으로 표현되는 경계치 문제는 가상일의 원리(virtual work principle)에 의해 다음과 같이 변분형(variational form)으로 전환된다: 모든 허용 가능한 검증(test) 변위장 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 에 대하여 다음 식을 만족하는 시도(trial) 변위장 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 구하라.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} ds \quad (6)$$

다음으로 Fig. 2에 예시한 N 개의 절점과 텔라우니 삼각형들로 구성된 불록하지 않은 자연요소 그리드망으로 식 (6)에 대한 자연요소법 근사화(NEM approximation)를 실시한다. 우선, 검증함수 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 와 시도함수 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 N 개의 근사함수 ψ_I 와 ϕ_J 로 전개된다.

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \mathbf{v}_I \psi_I(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Psi} \bar{\mathbf{v}} \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^N \mathbf{u}_J \phi_J(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi} \bar{\mathbf{u}} \quad (8)$$

위 식에서 ψ_I 는 3절점 삼각형 요소에서 정의되는 일정 변형률(constant strain) 유한요소(finite element) 기저함수이며, ϕ_J 는 자연요소법에서 보로로이 다이어그램(voronoi diagram)과 텔라우니 삼각화(delaunay triangulation)로

Fig. 2 A non-convex NEM grid composed of delaunay triangles and grid points

정의되는 라플라스(laplace) 보간함수이다. Fig. 2의 자연요소 그리드에 있어서 균열선단 절점 J 에 대한 라플라스 보간함수를 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 2에서 $supp(\phi_J)$ 는 라플라스 보간함수 ϕ_J 가 차지하는 정의역을 의미한다. 전술한 바와 같이 이 함수는 자신의 절점에서 1이 되고 나머지 절점에서 0이 되는 크로네커 델타 성질을 만족한다. 또한 1차 미분까지 함수가 연속적인 C^1 -연속성을 나타낸다(Sukumar and Moran, 1999). 라플라스 보간함수의 수학적 정의와 자연요소법에 대한 상세한 설명은 Sukumar 등(1998)과 Lee와 Cho(2008)을 참고하기 바란다. 시도함수와 검증함수를 다르게 사용한 이유는 두 함수의 곱이 각각의 델라우니 삼각형 내에 한정되도록 하여 가우스 수치적분을 바로 적용하고 수치적분의 정확도를 유지하기 위함이다(Cho and Lee, 2006).

Fig. 3 Laplace interpolation function $\phi_J(x)$ for a crack tip node

근사 전개식 (7)과 (8)을 변분정식화 (6)에 대입하여 정리하면 자연요소 그리드 상의 절점들에서의 절점 변위값 $\bar{u}$ 를 구하기 위한 행렬방정식에 도달한다.

$$\sum_I^N \mathbf{K}^I \bar{u} = \sum_I^N \mathbf{F}^I \quad (9)$$

위 식에서 절점 단위의 강성행렬 $\mathbf{K}^I$ 와 하중벡터 $\mathbf{F}^I$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{K}^I = \int_{\Omega_v^I} (\mathbf{L}\Psi)^T \mathbf{D}(\mathbf{x}) (\mathbf{L}\Phi) d\Omega \quad (10)$$

$$\mathbf{F}^I = \int_{\Gamma_N \cap \Omega_v^I} \Psi^T \hat{\mathbf{t}} ds \quad (11)$$

여기서, $\Omega_v^I = supp(\psi_I(\mathbf{x}))$ 는 I -번째 일정변형을 유한요소 기저함수의 정의역, 즉 I -번째 델라우니 삼각형을 나타내고, 두 개의 행렬 Ψ 와 Φ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_1 \end{bmatrix} \cdot \cdot \cdot \begin{bmatrix} \psi_I & 0 \\ 0 & \psi_I \end{bmatrix} \cdot \cdot \cdot \begin{bmatrix} \psi_N & 0 \\ 0 & \psi_N \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \end{bmatrix} \cdot \cdot \cdot \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \cdot \cdot \cdot \begin{bmatrix} \phi_N & 0 \\ 0 & \phi_N \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (10)과 (11)에서 알 수 있듯이 절점 강성행렬 $\mathbf{K}^I$ 와 하중벡터 $\mathbf{F}^I$ 는 델라우니 삼각형별 수치적분을 합하여 계산된다. 이것은 검증함수 $v(\mathbf{x})$ 와 시도함수 $u(\mathbf{x})$ 를 위한 근사함수로서 다른 유형으로서 두 함수의 곱은 그 정의역이 델라우니 삼각형 내에 한정되기 때문에 가능하다(Cho and Lee, 2006).

3. 자연요소법에서의 균열선단 그리드 세분화

이 절에서는 자연요소법에 의한 효과적이고 신뢰성있는 균열 해석을 위한 균열선단 그리드 세분화기법을 상세히 기술한다. Fig. 4(a)는 수평 엣지(edge) 균열해석을 위한 균일한 자연요소 그리드를 나타내고 있다. 자연요소 그리드는 유한개의 델라우니 삼각형과 절점으로 구성되어 있다. 전술한 바와 같이

(a) Selection of near-tip delaunay triangles

(b) Creation of 4 grid points and 8 delaunay triangles

Fig. 4 First refinement

균열선단 그리드 세분화는 2단계로 구성되어 있으며, Fig. 4는 1단계를 도시적으로 보여주고 있다. Fig. 4(a)에서 *nd_crk*는 균열선단(crack tip) 절점을 나타내고, 이 절점과 인접한 음영 처리된 8개의 삼각형들이 Fig. 4(b)와 같이 각각 둘로 세분화된다. 세분화된 4개의 작은 삼각형들이 공유하는 꼭지점에 검정색으로 표시된 절점들이 새로이 생성된다. 따라서, 세분화 1단계에서는 4개의 절점과 8개의 델라우니 삼각형들이 생겨나며, 4개의 절점들은 균열선단으로부터 동일한 거리 r_1 에 위치한다.

다음의 Fig. 5를 참고하여 새로 생성된 절점과 델라우니 삼각형에 대하여 전역(global) 절점번호와 전역 요소번호가 각각 부여된다. NODE와 ELEM을 그리드 세분화 전의 총 절점 수 그리고 총 삼각요소 수라고 하면, 전역 절점번호와 전역 요소번호는 순차적으로 NODE+1, NODE+2, NODE+3, NODE+4 그리고 ELEM+1, ELEM+2, ..., ELEM+8이 된다. 한편, 세분화된 총 16개의 작은 델라우니 삼각형들에 대해서 시계방향으로 1에서 3까지 국부(local) 절점번호가 갱신(update)되거나 새로이 부여된다. 한편 삼각형 각 변에 사각형으로 둘러싸인 숫자 1~3에는 이 변과 접하는 이웃 델라우니 삼각형의 전역 요소번호가 부여된다. 만약 이웃한 삼각형이 없는 경우에는 0이 부과된다.

Fig. 5 Local node numbers and neighbor elements for newly created delaunay triangular elements

다음의 Fig. 6은 균열선단 그리드 세분화 2단계를 도시적으로 보여주고 있다. 앞선 Fig. 4(b)의 1단계에서 세분화된 16개의 작은 델라우니 삼각형들 중에서 균열선단 절점 *nd_crk*를 공유하는 8개의 삼각형이 2단계 세분화를 위해 선택된다. 각각의 삼각형은 2개로 세분화되어 Fig. 6(b)에 나타난 바와 같이 총 16개의 보다 작은 삼각형들이 생성된다.

그리고 1단계에서와 동일하게 세분화된 4개의 삼각형의 꼭지점이 교차하는 지점에는 검정색 원으로 표시된 그리드 절점이 새로이 생성된다. 앞선 1단계에서는 Fig. 4(b)에서 보듯이 4개의 그리드 절점이 생성되었지만, 2단계에서는 균열 윗면과 아랫면에 절점이 분리 생성되어야 하기 때문에 총 5개의 그리드 절점이 생성되게 된다. 5개의 그리드 절점들은 균열선단 절점으로부터 동일한 반경 r_2 에 위치하며, 적절한 r_2 값은 다음

(a) selection of near-tip delaunay triangles

(b) Creation of 5 grid points and 8 delaunay triangles

Fig. 6 Second refinement

Fig. 7 Specification of local node numbers and neighbor elements for newly created Delaunay triangular elements

절의 수치실험을 통해 결정된다.

Fig. 6(b)와 Fig. 7을 참고하여 새로이 생성된 5개의 그리드 절점에 대한 전역 절점번호와 음영 처리된 8개의 작은 삼각형에 대한 전역 요소번호가 1단계에 연이어 부여된다. 참고로, 1 그리고 2단계를 통해 추가로 생성된 총 그리드 절점은 9개이며 델라우니 삼각형은 16개이다. Fig. 7은 2단계 세분화를 통해 세분화된 총 16개 삼각형에 대한 국부 요소번호 그리고 이웃한 요소번호의 부여 혹은 갱신 과정을 나타내고 있다.

4. 수치실험 및 해석결과

앞의 3절에서 소개한 균열선단 그리드 세분화기법에 대한 알고리즘을 Fortran으로 코딩하고, 앞서 개발된 자연요소법 프로그램(Cho and Lee, 2006)에 통합시켰다. 그리고 소개한 기법의 벤치마크를 위해 Fig. 8에 나타난 대칭 엣지 균열(edge cracks)이 있는 직사각형 평판을 선택하였다. 평판은

평면 변형률 상태에 있으며 영률과 프와송 비는 각각 $E=200\text{GPa}$ 와 $\nu=0.3$ 이다. 이 균열문제는 특이요소(singular element)를 이용한 유한요소해석 연구를 위해 Tracey (1971)가 처음 도입하였으며 그 이후에는 Barsoum(1976)이 채택하였다. 문제의 대칭성을 이용하여 음영 처리된 좌측 상단의 1/4 영역을 균열해석에 사용하였다.

Fig. 8 A plane-strain rectangular plate with symmetric edge cracks(unit: m)

균열해석을 위해서 3가지 유형의 자연요소 그리드가 사용되었다. Fig. 9(a)에 나타난 바와 같이 11×41 균일 그리드와 이 균일 그리드에 균열선단 세분화를 추가한 그리드, 그리고 Fig. 9(b)에 나타난 균열선단으로 편향(gradient)된 매우 조밀한 그리드로 해석결과를 비교하였다. 균열선단 그리드 세분화과정에서 5개의 절점에 추가되었으며 12개의 작은 델라우니 삼각형으로 세분화되었다. 추가된 5개의 절점들 중에서 대각선 상의 2절점 그리고 수직/수평 상의 3절점의 균열선단 절점으로 부터의 거리 r_1 과 r_2 는 각각 d_1 과 d_2 의 1/10로 설정하였다. 이 값은 예비 시뮬레이션을 통해 선정되었다.

선정된 3개의 자연요소 그리드에 대한 균열해석을 2절에 소개한 자연요소법으로 수행하였으며, 수치적분을 위해 13개

Fig. 9 NEM grids

가우스 적분점(gauss points)을 사용하였다. 다음의 Fig. 10은 앞의 Fig. 8에 나타난 균열선단 주위의 반원 경로 Γ 를 따른 응력분포들을 이론해와 세 가지 자연요소 그리드, 즉 균일 자연요소 그리드, Fig. 9(a)의 세분화된(refined) 그리드 그리고 Fig. 9(b)의 조밀한(fine) 그리드에 대해 비교한 것이다. 반원 경로 Γ 의 반경 r 은 $0.0139a$ 로 설정되었다.

위 응력분포에서 이론해는 균열선단에서의 응력 집중계수(SIF: stress intensity factor)를 구해 인장모드, 즉 모드 I 균열에서 (r, θ) 함수로 표현되는 균열선단 응력장(stress

Fig. 10 Comparison of stress distributions along the circular path $\Gamma(r/a=0.0139)$

field)에 대입하면 유도된다. ASTM(1965)에 따르면 이 문제에 대한 SIF는 다음과 같이 계산된다.

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \left(\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b} \right) \cdot C, \quad C = 1.02 \quad (14)$$

세 가지 자연요소 그리드 중에서 우선 균일(uniform)한 그리드는 이론해와 완전히 다른 원주방향으로 거의 일정한 응력분포를 나타낸다. 하지만, 균열선단으로 편향된 매우 조밀(fine)한 그리드는 응력값의 레벨은 낮지만 전반적으로 이론해와 유사한 원주방향 분포를 나타냄을 볼 수 있다. 이러한 경향은 균열선단 세분화 그리드에서도 확인할 수 있다. 균열선단 세분화 그리드의 총 절점수가 편향된 조밀한 그리드의 총 절점수의 20% 미만인 점을 감안하면 제안하는 균열선단 세분화기법의 효율성과 신뢰성을 확실히 정당화할 수 있다. 하지만, FEM에서는 균열선단 세분화 그리드를 사용하여도 응력분포의 정확도는 거의 향상되지 않음을 볼 수 있다. 따라서, 균열해석에 있어 자연요소법이 유한요소법에 비해 높은 정확성을 제공할 수 있음을 확인할 수 있다.

다음으로 균일한 그리드와 균열선단 세분화 그리드로 구한 균열해석 결과에 대한 오차분석을 수행하였다. 이 문제의 변위장에 대한 엄밀해를 구할 수 없기 때문에 편향된 매우 조밀한 자연요소 그리드로 구한 변위장을 엄밀해 $\hat{\mathbf{u}}$ 이라고 가정한다. 그러면 나머지 두 그리드로 구한 변위장 $\mathbf{u}_h$ 의 에너지 노름(energy norm)에서의 전역 절대오차(global absolute error) $\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{E(\Omega)}$ 는 다음과 같이 근사할 수 있다(Szabo and Babuska, 1991).

$$\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{E(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\epsilon}_h) \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h) dA \approx |U(\hat{\mathbf{u}}) - U(\mathbf{u}_h)| \quad (15)$$

여기서, $U(\cdot)$ 는 총 변형률 에너지를 나타낸다. 한편, 총 변형률 에너지에 대한 전역 상대오차(global relative error) ξ_G 는 다음과 같이 정의된다.

$$\xi_G = \frac{\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_{E(\Omega)}}{U(\hat{\mathbf{u}})^{1/2}} \times 100\% \approx \left(\frac{U(\hat{\mathbf{u}}) - U(\mathbf{u})}{U(\hat{\mathbf{u}})} \right)^{1/2} \times 100\% \quad (16)$$

Table 1은 두 가지 자연요소 그리드에 대해서 그리드 밀도(grid density)에 따른 전역 절대오차와 전역 상대오차를 비교하고 있다. 우선, 두 가지 그리드 모두 그리드 밀도 증가에 비해

Table 1 The computed absolute and relative errors to the NEM grid density
(*) indicate the values of 1/2 full model)

NEM grid	Absolute error $\ \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\ _{E(\Omega)}$		Relative error $\xi_G(\%)$	
	Uniform	Refined	Uniform	Refined
3×9	1.182E-05 (1.211E-05)	1.642E-05 (1.620E-05)	20.565 (21.041)	18.141 (17.895)
7×25	1.129E-05 (1.156E-05)	1.049E-05 (1.087E-05)	13.908 (14.246)	11.592 (12.023)
11×41	9.929E-06 (10.122E-06)	8.322E-06 (8.574E-06)	10.968 (11.181)	9.193 (9.471)
17×65	7.964E-06 (8.098E-06)	6.693E-06 (6.873E-06)	8.798 (8.945)	7.394 (7.592)
21×81	7.174E-06 (7.249E-06)	6.042E-06 (6.084E-06)	7.926 (8.009)	6.675 (6.722)

하여 오차의 일률적인 감소를 나타낸다. 하지만, 모든 그리드 밀도에 있어서 균열선단 세분화된 그리드가 균일한 그리드 보다 낮은 오차값을 보여주고 있다. 괄호 속은 값은 블록하지 않은 균열선단 영역을 포함하도록 상하 경계조건을 사용하지 않은 1/2 상하 풀 모델(full model)의 결과를 나타낸다. 전반적으로 1/4 대칭모델에 비해 다소 높은 값을 나타내지만, 상대차이의 최대값이 2.5% 미만으로 두 모델은 거의 유사한 오차를 보여 준다.

Fig. 11은 총 절점 수 N 에 따른 전역 상대오차 ξ_G 를 log-log 스케일로 나타내고 있다. 균열선단 세분화된 그리드가 균일한 그리드 보다 좀 더 높은 수렴률(convergence rate)을 나타낸다. 따라서, 균열선단에 5개의 절점을 추가함으로써 오차는 감소하고 수렴률은 향상되었다. 상하 1/2 풀 모델 역시 거의 유사한 수렴률을 나타낸다.

Fig. 11 Comparison of convergence rates between uniform and crack-tip refined NEM grids

5. 결 론

본 논문에서는 자연요소법(NEM)에 의한 균열해석의 효율성과 신뢰성을 향상시키기 위한 균열선단 그리드 세분화기법을

소개하였다. 2단계로 구성된 알고리즘을 통해 균열선단 절점에 접한 델라우니(delaunay) 삼각형들은 보다 작은 삼각형들로 세분화되었으며, 삼각형들의 교점에는 절점이 새로이 생성되었다. 제안한 그리드 세분화기법의 타당성과 유용성을 입증하기 위해 대칭 엣지 크랙(edge cracks)을 가진 직사각형 판재의 모드 I 균열해석을 수행하였다.

세 가지 유형의 NEM 그리드에 대해 균열해석을 수행하였으며, 균열선단 주위의 응력분포를 이론해와 비교하였다. 이론해와 완전히 다른 일정한 응력분포를 나타낸 균일한 그리드와 달리 균열선단이 세분화된 그리드는 매우 조밀한 그리드와 같이 이론해와 유사한 응력분포를 나타내었다. 하지만 균열선단이 세분화된 그리드의 총 절점수는 조밀한 그리드의 20% 미만이었다. 그리고 그리드 밀도(grid density)에 따른 해석결과의 오차분석을 통해 균열선단 세분화된 그리드가 모든 그리드 밀도에서 균일 그리드 보다 낮은 오차와 높은 수렴률을 나타내었다. 따라서, 제안한 그리드 세분화기법의 효율성과 신뢰성이 수치해석을 통해 명확히 입증되었다. 더욱이 블록하지 않는 영역을 포함하는 자연요소 그리드에서도 일반성과 수렴성을 나타내었다.

본 논문에서는 세분화를 2단계까지 실시하였지만, 추가적으로 세분화가 가능하며 보다 정확한 근사해를 구할 수 있을 것이다.

감사의 글

이 논문은 2019학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음. 이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(과제번호: NRF-2017R1D1A103028879).

References

- ASTM (1965) *Fracture Toughness Testing and Its Applications*, ASTM International, Baltimore, Md.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994) Element-free Galerkin Methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37(2), pp.229~256.
- Braun, J., Sambridge, M.A. (1995) A Numerical Method for Solving Partial Differential Equations on Highly Irregular Evolving Grids. *Nature*, 376 (655-660), pp.655~660.
- Basoum, R.S. (1976) On the use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 10(1), pp.25~37.
- Chinesta, F., Cescotto, S., Cueto, E., Lorong, P. (2011) *Natural Element Method for the Simulation of Structures and Processes*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Cho, J.R., Lee, H.W. (2006) A Petrov-Galerkin Natural Element Method for Securing the Numerical Integration Accuracy, *J. Mech. Sci. & Technol.*, 20(1), pp.94~109.
- Cho, J.R., Lee, H.W., Yoo, W.S. (2013) Natural Element Approximation of Reissner-Mindlin Plate for Locking-Free Numerical Analysis of Plate-like Thin Elastic Structures, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 256(1), pp.17~28.
- Dolbow, J., Belytschko, T. (1999) Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods, *Comput. Mech.*, 23(3), pp.219~230.
- Duarte, C.A., Oden, J.T. (1996) An h - p Adaptive Method using Clouds, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 139, pp.237~262.
- Lee, H.W., Cho, J.R. (2008) The Petrov-Galerkin Natural Element Method: I. Concepts, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 18(2), pp.103~111.
- Liu, W.K., Jun, S., Zhang, Y.F. (1995) Reproducing Kernel Particle Methods, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 20(8-9), pp.1081~1106.
- Sukumar, N., Moran, B., Belytschko, T. (1998) The Natural Element is Solid Mechanics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 43, pp.839~887.
- Sukumar, N., Moran, B. (1999) C^1 Natural Neighbor Interpolant for Partial Differential Equations, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 15(4), pp.417~447.
- Szabo, B., Babuska, I. (1991) *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Tracey, D.M. (1971) Finite Elements for Determining of Crack Tip Elastic Stress Intensity Factors, *Eng. Fract. Mech.*, 3(3), pp.255~265.
- Zu, T., Atluri, S.N. (1998) A Modified Collocation Method and a Penalty Formulation for Enforcing the Essential Boundary Conditions in the Element Galerkin Method, *Comput. Mech.*, 21(3), pp.211~222.

요 지

본 논문은 균열선단 그리드 세분화기법을 소개하고 자연요소법을 이용한 균열해석에 이 기법을 적용함으로써 그 유효성을 고찰하였다. 유한요소법에 있어서의 국부적 h -세분화와 같이 높은 응력 특이성을 보이는 균열선단 주위를 따라 자연요소법 그리드를 국부적으로 세분화하였다. 본 논문에서 소개되는 그리드 세분화기법은 2단계로 구성되며, 1단계에서는 그리드 점들이 추가되고 2단계에서는 균열선단 절점을 공유하는 델라우니 삼각형들이 나뉘게 된다. 제안하는 그리드 세분화기법의 타당성과 균열해석에서의 유효성을 입증하기 위해 대칭 엣지 균열을 갖는 평면 변형률 상태의 사각 평판을 해석하였다. 수치해석 결과의 상대비교를 위해 균일한 자연요소 그리드를 이용한 균열해석도 수행하였으며, 균열선단이 세분화된 그리드는 균일한 그리드와는 달리 이론해와 조밀한 그리드와 유사한 균열선단 응력분포를 나타내었다. 또한, 총 그리드 절점수에 대한 해석결과의 전역 상대오차에서도 세분화된 그리드가 균일한 그리드에 비해 높은 수렴을 나타내었다.

핵심용어 : 자연요소법, 균열선단 그리드 세분화, 균열해석, 균열선단 응력분포, 수렴률